गणित

माध्यमिक कक्षाओं के लिए

भाग 1

(कक्षा VI की पाठ्यपुस्तक)

गणित

माध्यमिक कक्षाओं के लिए

भाग 1

(कक्षा VI की पाठ्यपुस्तक)

मनमोहन सिंह अरोरा   आर० एम० भागवत   एस० डी० चोपड़ा

संपादक

मनमोहन सिंह अरोरा

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

इस पुस्तक का प्रथम संस्करण राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् की अनुमति से जूलाई 1977 में मैसर्स दी मैकमिलन कम्पनी ऑफ इन्डिया लिमिटेड द्वारा प्रकाशित हुआ था तथा राष्ट्रीय परिषद् की अनुमति से जूलाई 1978 में उन्हीं के द्वारा पुनर्मुद्रित हुआ था। इसके बाद के पुनर्मुद्रण राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् द्वारा प्रकाशित किये गये है।

प्रथम संस्करण

जूलाई 1977
आषाढ़ 1899

पुनर्मुद्रण

जूलाई 1978
आषाढ़ 1900
जून 1979
ज्येष्ठ 1901
मार्च 1980
चैत्र 1902

P.D. 10T

मूल्य : रु० 3.10

मुख पृष्ठ चित्र : सी० पी० टंडन

प्रकाशन विभाग में, श्री विनोद कुमार पंडित राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविन्द मार्ग, नई दिल्ली 110016 द्वारा प्रकाशित तथा पर्ल आफसेट प्रेस, 5/33, कीर्तिनगर इन्डस्ट्रीयल एरिया, नई दिल्ली 110015 में मुद्रित।

प्राक्कथन

यह पुस्तक भारतीय रंगभूमि के अनुरूप गणित प्रस्तुत करती है। यह गणित न तो 'आधुनिक' है और न ही 'परम्परागत'। यहाँ हमारे सामने जो भी है वह है अनावश्यक पृथकता का त्याग करते हुए और विद्यार्थी को दैनिक जीवन में गणित की अनुरूपता और अनुप्रयोगों की जानकारी देते हुए तथा इसके साथ ही आगे की खोज और अध्ययन के लिए उसकी कल्पना को 'जागृत' करते हुए, उदाहरणों की सहायता से विकसित किया हुआ एक सरल, सुन्दर और सुरूप गणित। इस पाठ्यपुस्तक में कक्षा में करने हेतु अनेकों गतिविधियाँ सुझाई गई हैं और विषय सामग्री को विद्यार्थी के लिए 'परिपूर्ण' बनाने हेतु इनको उदारता से रैखिक आकृतियों एवं चित्रों द्वारा समझाया गया है। परिषद्, संपादक मंडल के अध्यक्ष डा० एम० पी० सिंह और उसके सदस्यों की आभारी है जिनके मार्ग दर्शन में यह काम पूरा किया गया।

पहले इस सामग्री का मंडल के सदस्यों के बीच विवेचन किया गया और इसके बाद 1 नवम्बर से 3 नवम्बर 1976 तक राष्ट्रीय शिक्षा संस्थान में आयोजित एक कार्यशाला में, जिसमें इस सामग्री की ध्यानपूर्वक जाँच और इसमें सुधार हेतु सुझाव प्राप्त करने के लिए संपूर्ण भारत से अनुभवी अध्यापकों और विषय-विशेषज्ञों को आमंत्रित किया गया था, इसका समीक्षात्मक विवेचन किया गया।

पुस्तक का अंतिम लेखन और विषय-संपादन डा० मनमोहन सिंह अरोरा ने किया। डा० बी० देवकीनन्दन, श्री जी० डी० ढल, डा० एस०, के० सिंह गौतम एवं श्री महेन्द्र शंकर ने आवश्यक सहायता प्रदान की। डा० आर० पी० गुप्ता, डा० बी० देवकीनन्दन एवं श्री ईश्वर चन्द्र ने उत्तर तैयार किए। हिन्दी संस्करण का विषय-संपादन डा० बी० देवकीनन्दन एवं श्री महेन्द्र शंकर द्वारा किया गया। मैं इनमें से प्रत्येक का विशेष रूप से प्रो० मनमोहन सिंह अरोरा का आभारी हूँ जिन्होंने अपने व्यस्त कार्यक्रम के होते हुए भी संपादन कार्य को स्वीकार किया और बहुत कम समय के अंदर ही इसे पूर्ण किया।

इस पुस्तक को अध्यापकों और विद्यार्थियों के हाथों में सौंपते हुए मुझे प्रसन्नता हो रही है। पुस्तक के अगले संस्करण में सुधार हेतु, परिषद् पाठकों के अनुभवों का स्वागत करेगी क्योंकि हमने सदैव विद्यार्थियों के लिए अच्छे से अच्छे रूप में उचित सामग्री प्रदान करने का प्रयत्न किया है।

एस० के० मित्रा
संयुक्त निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
जून, 1977

प्रस्तावना

शिक्षा की 10+2 पद्धति के अंतर्गत राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने कक्षाओं VI से VIII तक की गणित की पाठ्यपुस्तकों और इनसे संबंधित सामग्री तैयार करने में सहायता हेतु एक संपादक मंडल का निर्माण किया। संपादक मंडल ने वर्तमान पुस्तकें, जोकि राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने तैयार की थीं, को देखने के अतिरिक्त व्यापक रूप से संपूर्ण स्कूल ढाँचे के लिए और विशेष रूप से कक्षा VI के लिए प्रस्तावित गणित के पाठ्यक्रम की जाँच की। ऐसा अनुभव किया गया कि शिक्षा की 10+2 पद्धति के तत्वज्ञान और उद्देश्यों तथा वर्तमान पुस्तकों के प्रयोग करने वालों से जो समालोचनाएँ प्राप्त हुई हैं उनको देखते हुए, इन वर्तमान पुस्तकों में एक दीर्घ संशोधन की आवश्यकता है। मंडल का प्रत्येक सदस्य इस तथ्य से भी अभिज्ञ था कि विभिन्न विषयों को पढ़ाने में जो विधि उपयोग में लाई जाए उसमें हमारी जनता और समाज की आवश्यकताएँ और आकांक्षाएँ प्रतिबिम्बित हों।

अत: इस पुस्तक में सरलता और सुन्दरता के साथ संकल्पनाओं का प्रस्तुतीकरण किया गया है। प्रत्येक संकल्पना को उपयुक्त उदाहरणों द्वारा प्रोत्साहित किया गया है। जहाँ तक संभव हो सका है अनावश्यक दृढ़ता का त्याग किया गया है। संकल्पना का उपयोग करने में विद्यार्थी के समर्थ होने के लिए अभ्यास हेतु हल किए उदाहरण प्रचुर मात्रा में दिए गए हैं। जहाँ संभव हो सका है, यह दृष्टिगत रखते हुए कि विद्यार्थी शिक्षण-अध्ययन प्रक्रिया में पूर्ण रूप से संबद्ध रहे, अध्यापक के लिए कक्षा में करने योग्य गतिविधियाँ सुझाई गई हैं। पुस्तक में रैखिक आकृतियाँ और चित्र उदारता से दिए गए हैं जिससे कि विषय सामग्री 'परिपूर्ण' हो जाए।

इस पुस्तक की कुछ और मुख्य विशेषताएँ निम्न पेराग्राफों में वर्णित हैं :

(1) संख्याओं की चर्चा केवल घनपूर्णांकों और पूर्ण संख्याओं तक ही सीमित रखी गई है। इसलिए भिन्नों, परिमेय संख्याओं, और दशमलव भिन्नों को कक्षा VII के लिए छोड़ दिया गया है।

(2) संख्याओं के कुछ रोचक गुणों, जैसे कि विभाज्यता की जाँच इत्यादि, को शामिल किया गया है, यद्यपि इनकी उपपत्ति नहीं दी गई है।

(3) विद्यार्थी को आधुनिक पारिभाषिक शब्द का केवल वहाँ ही ज्ञान कराया गया है जहाँ उसकी आवश्यकता प्रतीत होती है तथा जहाँ इससे उसे कुछ लाभ होता हो। उदाहरणार्थ, यह कहा गया है कि पूर्ण संख्याओं का योग क्रमविनिमेय है। परन्तु इसके साथ ही, विद्यार्थी को सुझाव दिया गया है कि वह इस नाम की चिंता न करे। उसे तो केवल यह तथ्य सीखना और देखना चाहिए कि दो पूर्ण संख्याओं के योग में क्रम का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। जहाँ तक संभव हो सका है, अनावश्यक आधुनिक पारिभाषिक शब्दों और संकेतों का परित्याग किया गया है। उदाहरणार्थ, विद्यार्थी को केवल एक बार संख्या और संख्यांक के बीच का अंतर बता दिया गया है। इसके आगे दोनों के बीच में कोई अंतर नहीं रखा गया है और दोनों शब्दों को एक दूसरे के स्थान पर प्रयोग किया गया है।

(4) प्रत्येक अनुच्छेद के अंत में दिए गए प्रश्नों की संख्या इस प्रकार है कि विद्यार्थी उनको सरलतापूर्वक कुछ घंटों के कार्य के रूप में कर सकता है। अनुच्छेद छोटे हैं और इसी प्रकार एकक भी। इससे विद्यार्थी को, जो कुछ उसने सीखा है उसकी जानकारी प्राप्त करने में सहायता मिलेगी।

(5) उपयुक्त स्थानों पर विविध प्रश्नावलियों को शामिल किया गया है ताकि विद्यार्थी पढ़ी हुई सामग्री की पुनरावृत्ति कर सके।

(6) प्रत्येक एकक के प्रारम्भ में उसका सारांश दिया गया है ताकि विद्यार्थी यह जान सके कि वह इस विशेष एकक में क्या पढ़ने जा रहा है।

(7) अंकगणित, बीजगणित और ज्यामिति को मिलाकर एक ही पाठ्यपुस्तक बनाई गई है।

(8) लाभ और हानि, साधारण ब्याज इत्यादि के अनुप्रयोगों का अध्ययन करते समय वास्तविक जीवन से संबंधित एवं सरल स्थितियों को शामिल किया गया है।

(9) इसके लिए कि विषय सामग्री विद्यार्थी के लिए 'परिपूर्ण' हो सके, ज्यामिति के अधिकांश परिणामों का सुझाई गई गतिविधियों द्वारा सत्यापन किया गया है।

(10) पुस्तक की भाषा सरल और रोचक है। $11^+ - 12^+$ आयु के बच्चे के शब्दकोश को दृष्टिगत रखने का निरन्तर ध्यान रखा गया है। जहाँ तक हो सका है, सरल और छोटे वाक्यों का प्रयोग किया गया है।

मुझे यह लिखने में गर्व है कि हमें जो कार्य सौंपा गया था वह हमें इसके लिए दिए गए अल्प समय में ही पूर्ण हो गया। निस्संदेह यह मेरे साथियों में से प्रत्येक के स्वेच्छ और अपरिमित सहयोग से हुआ और मैं उनका आभारी हूँ। मंडल के प्रत्येक सदस्य ने कठोर परिश्रम और निष्ठा के साथ, अपनी शक्ति के अनुसार इसमें योगदान दिया। वास्तव में, गणित के लिए अपने को समर्पित करते हुए मंडल के प्रत्येक सदस्य ने जिस दलीय भावना से कार्य किया केवल उस के फलस्वरूप ही, विद्यार्थी के लिए, यह एक अच्छी प्रकार लिखी हुई एवं रोचक पुस्तक तैयार की जा सकी।

विशेषरूप से मैं प्रो० मनमोहन्न सिंह अरोरा का कृतज्ञ हूँ कि उन्होंने अपने अन्य भारी व्यावसायिक कार्यों के होते हुए भी कम से कम समय में इस पुस्तक का संपादन किया। इस कार्य में उनको डा० बी० देवकीनन्दन, श्री जी० डी० डल, डा० एस० के० सिंह गौतम एवं श्री महेन्द्र शंकर ने आवश्यक सहायता प्रदान की। पुस्तक के निर्माण कार्य का निरीक्षण डा० आर० पी० गुप्ता, डा० बी० देवकीनन्दन, डा० एस० के० सिंह गौतम, डा० राम औतार एवं श्री महेन्द्र शंकर द्वारा किया गया। डा० आर० पी० गुप्ता, डा० बी० देवकीनन्दन एवं श्री ईश्वर चन्द्र ने उत्तर प्रदान किए। हिन्दी संस्करण का विषय-संपादन डा० बी० देवकीनन्दन एवं श्री महेन्द्र शंकर ने किया। मैं सच्चे हृदय से इन में से प्रत्येक का बहुत कृतज्ञ हूँ।

जिन प्रतिबन्धों के अंतर्गत हमें कार्य करना पड़ा उनके कारण यह बहुत कुछ संभव है कि पूर्ण सावधानियों के लेते हुए भी कुछ छपाई संबंधी या अन्य अशुद्धियाँ हमारे ध्यान से बच गई हों।

इस पुस्तक में सुधार हेतु किन्हीं भी सुझावों का मंडल स्वागत करेगा और अत्यन्त कृतज्ञता के साथ उन्हें स्वीकार करेगा।

एम० पी० सिंह
अध्यक्ष
संपादक मंडल

नई दिल्ली
जून, 1977

कृतज्ञताज्ञापन

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् निम्न व्यक्तियों की आभारी है जिन्होंने 1 से 3 नवम्बर 1976 तक एन० आई० ई० कैम्पस, नई दिल्ली में आयोजित एक कार्यशाला में इस पाठ्यपुस्तक की प्रथम सामग्री का समीक्षात्मक विवेचन किया :

1. श्री ए० आर० आहूजा
   धनपतमल विरमानी स्कूल, रूप नगर, दिल्ली
2. डा० मनमोहन सिंह अरोरा
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
3. डा० राम औतार
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
4. श्रीमती जी० टी० एस० चड्ढा
   केन्द्रीय विद्यालय, आर० के० पुरम, नई दिल्ली
5. श्रीमती सुशील चावला
   केन्द्रीय विद्यालय, गोल मार्केट, नई दिल्ली
6. डा० एस० डी० चोपड़ा
   कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय, कुरुक्षेत्र
7. श्री एम० एस० दहिया
   राजकीय उच्चतम माध्यमिक बालक विद्यालय, रूप नगर, दिल्ली
8. डा० बी० देवकीनन्दन
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
9. श्री जी० डी० दत्त
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
10. डा० एस० के० सिंह गौतम
    राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
11. डा० आर० पी० गुप्ता
    राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
12. श्री एस० आर० जयपाल
    केन्द्रीय विद्यालय, आर० के० पुरम, नई दिल्ली
13. श्री आर० कानन
    बेसेंट थियोसोफिकल हाई स्कूल, थिरुवानमियूर, मद्रास
14. श्री एन० कृष्णमाचारी
    आर० के० एम० रेसीडेन्शल हाई स्कूल माईलापोर, मद्रास

15. श्रीमती एस० मल्होत्रा
    लेडी इरविन हायर सैकेन्डरी स्कूल, नई दिल्ली
16. कु० जे० मंसुखानी
    लेडी इरविन हायर सैकेन्डरी स्कूल, नई दिल्ली
17. कु० ऊषा मेहता
    दिल्ली पब्लिक स्कूल, नई दिल्ली
18. कु० विमला गीतवानी
    राजकीय कन्या उच्चतर माध्यमिक विद्यालय
    आ० ए० आर० आई० पूसा, नई दिल्ली
19. श्री बबीआह नायडू
    राजकीय जूनियर कालेज, हैदराबाद
20. श्री आर० जी० नांगिया
    केन्द्रीय विद्यालय, दिल्ली छावनी, दिल्ली
21. श्री मोहिन्दर राज
    केन्द्रीय विद्यालय, जनकपुरी, नई दिल्ली
22. श्री थलकान सिंह राठौर
    राजकीय जूनियर बेसिक स्कूल, जबलपुर
23. श्री रमेश चन्द्र सनाढ्या
    राजकीय सैकेन्डरी स्कूल, कोठारिया, राजस्थान
24. डा० बी० एम० शाह
    एम० एस० यूनिवर्सिटी आफ बड़ौदा, बड़ौदा
25. श्री महेन्द्र शंकर
    राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
26. श्रीमती एस० शर्मा
    स्प्रिंगडेल्स सीनियर स्कूल, नई दिल्ली
27. श्री इन्द्रजीत सिंह
    एस० एस० खालसा हायर सैकेन्डरी स्कूल, नई दिल्ली
28. डा० एम० पी० सिंह
    इन्डियन इन्सटीट्यूट आफ टैक्नोलोजी, नई दिल्ली
29. श्रीमती एस० सूद
    केन्द्रीय विद्यालय, एन्डरूजगंज, नई दिल्ली
30. श्री किशनलाल श्रीवास्तव
    राजकीय मिडिल स्कूल, जबलपुर

अध्यापक के लिए निर्देश

अध्यापक का एक अत्यधिक महत्वपूर्ण कार्य है कि विषय सामग्री को विद्यार्थी के सम्मुख इस प्रकार प्रस्तुत करना कि वह उसकी कल्पना को 'जागृत' कर सके। एक 'अच्छे' अध्यापक से केवल अपने विद्यार्थियों को लाभ पहुँचाने की ही आशा नहीं की जाती बल्कि उससे यह भी आशा की जाती है कि वह ऐसे कदम भी उठाए ताकि उनके लाभ को 'परिपूर्ण' रखा जा सके। शिक्षण-अध्ययन प्रक्रिया में, पुस्तक बहुत से साधनों में से केवल एक साधन है। वास्तव में जो कार्य करने वाला है वह अध्यापक ही है। अतः इस पुस्तक को पढ़ाते समय निम्न बातों को ध्यान में रखना चाहिए :

(1) जहाँ तक संभव हो सका है विद्यार्थी को प्रारम्भ में पहले यह बताया गया है कि किसी विशेष एकक में वह क्या पढ़ने जा रहा है। तब प्रत्येक संकल्पना का एक सरल उदाहरण या एक सरल स्थिति के द्वारा परिचय कराया गया है। इसके बाद विद्यार्थी को तर्क संगत और क्रमबद्ध चरणों की एक शृंखला की सहायता से कठिनता के वांछित अक्षांश तक ले जाया जाता है।

(2) कोई 'आधुनिक' गणित नहीं है और कोई 'परम्परागत' गणित नहीं है। दोनों ही नाम भ्रमात्मक हैं। इस पुस्तक में हमारे सामने जो भी है वह है अनावश्यक दृढ़ता से रहित, वास्तविक जीवन की स्थितियों के आशाजनक अनुरूप तथा इसके साथ ही आगे के अध्ययन और खोज के लिए विद्यार्थी की कल्पना को 'जागृत' करने में समर्थ एक सरल, सुन्दर और सुरूप गणित। जो आवश्यक है वह है, जहाँ संभव हो गतिविधियों का प्रयोग करते हुए, विद्यार्थी को गणित का अनुभव कराते हुए और उसे उसके अपने हाथ और मस्तिष्क से गणित 'करवाते' हुए आधुनिकतम शिक्षण।

(3) लिखने का ढंग कुछ शाब्दिक है। अनौपचारिक और अनुसंधानिक विधि के पक्ष में दृढ़ता का त्याग किया गया है।

(4) कठिन प्रश्नों को तारांकित किया गया है।

(5) पुस्तक में विभिन्न स्थानों पर 'क्यों ?' लगा दिया गया है। यहाँ अध्यापक को विद्यार्थी द्वारा उत्तर देने पर और देना चाहिए। केवल अंत में ही, यदि आवश्यक हो तो, अध्यापक को स्वयं उत्तर देने पर विचार करना चाहिए।

(6) प्रश्नों को कठिनता के आरोहीक्रम में रखा गया है। विद्यार्थी के योग्यता स्तर को देखते हुए गृह कार्य हेतु इन प्रश्नों की संख्या में वृद्धि की जा सकती है या इनमें से केवल कुछ ही प्रश्न गृह कार्य के लिए दिए जा सकते हैं।

विद्यार्थी के लिए निर्देश

आप इस गणित की पुस्तक का अध्ययन आरम्भ कर रहे हैं। यदि आप प्रारम्भ में ही सीखने की कुछ 'अच्छी' प्रवृत्तियाँ बना लेंगे, तो आप पाएँगे कि गणित का अध्ययन बहुत ही सार्थक और रुचिकर है। कुछ 'अच्छी' सीखने की प्रवृत्तियाँ सुझाव के तौर पर नीचे दी जा रही हैं :

1. **गणित केवल कुछ कार्य करके ही सीखी जाती है।** केवल अपनी पाठ्यपुस्तक को ही न पढ़ें। सदैव एक पेंसिल और कागज लीजिए और पाठ्यसामग्री की सहायता से 'कार्य' प्रारम्भ कीजिए।

2. पाठ्यसामग्री में जहाँ जहाँ आपको शब्द 'क्यों?' मिले, वहाँ आप उसके कारण देने का प्रयास करें।

3. **एक ही प्रश्न पर अधिक समय व्यतीत न करें।** यह सदैव अच्छा है कि आप नए प्रश्न को हल करें और कुछ समय बाद शुद्ध मस्तिष्क से उस प्रश्न को हल करें जिसमें आप कठिनाई अनुभव करते हैं।

4. मनुष्य के मस्तिष्क में केवल सीमित सूचनाएँ ही इकट्ठी रह सकती हैं। जिस वस्तु का अधिकतर उपयोग नहीं होता, उसे प्रायः भंडार से हटा दिया जाता है। **इसलिए यह अच्छा होगा कि आप प्रत्येक एकक के मूलभूत परिणामों की संक्षिप्त सूची बना लें और समय-समय पर उनका पुनरावलोकन करें।**

संकेत - सूची

$+$	:	योग
$-$	:	घटाना/व्यवकलन
$\div$	:	विभाजन
$\times$	:	गुणन
$<$	:	कम है/छोटा है
$=$	:	बराबर है/समान है
$>$	:	अधिक है/बड़ा है
$\vert\ \vert$	:	निरपेक्ष मान
%	:	प्रतिशत
$\angle$	:	कोण
$\triangle$	:	त्रिभुज
$\parallel$	:	समांतर है
$\perp$	:	लम्ब है

SYLLABUS FOR CLASS VI

UNIT I: NATURAL NUMBERS AND WHOLE NUMBERS

Natural numbers; numbers and numerals; place-value and the digit zero; the number zero; representation of whole numbers on a number line.

UNIT II: OPERATIONS ON WHOLE NUMBERS

(All properties to be formulated through examples.) Addition and its properties; subtraction and its relationship to addition; multiplication and its properties; multiplication as repeated addition; the distributive property for whole numbers; division and its relationship to multiplication; division as repeated subtraction; the algorithm for division.

Properties of 0 (zero) and 1 (unity); impossibility of division by zero (motivated through repeated subtraction.)

UNIT III: INTEGERS

The need for integers; order on the number line; absolute value.

UNIT IV: OPERATIONS ON INTEGERS

Addition, subtraction, multiplication and division of integers and their properties; rules of sign through patterns.

UNIT V: POWERS OF INTEGERS

Exponential notation; computation of squares, cubes, etc. of the given integers; square roots of perfect squares (positive integers) by factor method.

UNIT VI: PROPERTIES OF NUMBERS

Factors and multiples; prime and composite numbers; prime factorization property; divisibility tests for 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11.

UNIT VII: ALGEBRAIC EXPRESSIONS WITH INTEGRAL COEFFICIENTS

Use of letters to denote numbers; terms of an expression; algebraic expressions up to and including trinomials; addition and subtraction of algebraic expressions; use of brackets and other grouping symbols; multiplication of binomials. (18)

UNIT VIII: INTRODUCTION TO EQUATIONS

Use of letters to denote unknown quantities; solution of equations by
(a) trial and error,
(b) using properties of operations.
Applications in solution of word problems. (12)

UNIT IX: RATIOS, PERCENTAGES AND THEIR APPLICATIONS

Ratio, proportion; direct and inverse variation; percentages. Applications to real life situations: problems in profit and loss; simple interest and problems of national importance. (25)

UNIT X: INCIDENCE PROPERTIES IN THE PLANE

The following incidence properties are to be observed and subsequently assumed:
(a) Through any two different points in a plane, there is exactly one line. This line lies wholly in the plane.
(b) Two different lines in a plane may be: (i) intersecting, or (ii) parallel.
If they intersect, they intersect in exactly one point; collinearity; concurrent lines. (6)

UNIT XI: MEASUREMENT OF LINE SEGMENTS

Comparison of line segments; equal segments; choice of standard unit of measurement; ruler and its uses; construction of line segment of a given length; construction of a segment whose length is equal to sum or difference of lengths of two given line segments. (8)

UNIT XII: ANGLES

Rays and angles; vertex and arms of an angle; comparison of angles; straight, right, complete and zero

angles; (degree) measure of an angle; use of protractor to measure angles and construct angles of given magnitudes; acute, obtuse and reflex angles; adjacent angles; linear pair; complementary and supplementary angles; set squares; the interior and exterior of an angle.
Construction of angles of 30°, 45°, 60° and 90°, using set squares.

UNIT XIII: PARALLEL LINES

Parallel lines; transversals; corresponding angles; alternate angles; interior and exterior angles.
Using set squares; (i) to construct a line parallel to a given line; (ii) to draw a perpendicular to a given line from a point outside it.

UNIT XIV: TRIANGLES

A triangle; its interior and exterior; vertices, sides and angles of a triangle; sum of the angles of a triangle; isosceles, equilateral, scalene, acute, obtuse and right triangles; sum of the two sides of a triangle.

UNIT XV: CIRCLES

Arc, circumference, radius, chord, diameter, segments and sectors of a circle; interior and exterior of a circle.

UNIT XVI: COMPASSES AND RULER CONSTRUCTIONS

The student should be familiar with the following constructions, using compasses and ruler:

(i) Constructing an angle equal to a given angle;
(ii) Bisecting a given angle;
(iii) Dividing a circular region into six equal sectors;
(iv) Construction of angles of 15°, $22\frac{1}{2}$°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, 120°, 135°, 150° and 240°;
(v) Drawing a line parallel to a given line from a point outside it;
(vi) Constructing a triangle when lengths of its three sides are given.

UNIT XVII: RECOGNITION OF POLYHEDRA

Congruence of plane figures; regular polygons; vertical and horizontal directions. Recognition of faces, edges and vertices of cubes, cuboids, right prisms, pyramids; net of a cube; counting of vertices, edges and faces of polyhedra; Euler's formula.

UNIT XVIII: LINEAR SYMMETRY

Symmetric and non-symmetric figures; line(s) of symmetry; properties of pairs of symmetric figures; construction of symmetric figures through paper cutting and paper folding, etc.

(i) To construct a point symmetric to a given point with respect to a given line of symmetry.

(ii) Given two points, to construct their line of symmetry.

(iii) To construct a line segment symmetric to a given line segment with respect to a given line of symmetry.

विषय सूची

सम्पादक मण्डल ...

प्राक्कथन ... v

प्रस्तावना ... vii

कृतज्ञताज्ञापन ... ix

अध्यापक के लिए निर्देश ... xi

विद्यार्थी के लिए निर्देश ... xii

संकेत सूची ... xii

कक्षा VI का पाठ्यक्रम ... xiii

एकक

I धनपूर्णांक और पूर्ण संख्याएँ ... 1

1.1 धनपूर्णांक 1
1.2 संख्या और संख्यांक 2
1.3 स्थानीय मान तथा अंक 0 2
1.4 संख्या शून्य 5
1.5 पूर्ण संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण 6

II पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाएँ ... 9

2.1 योग पर विचार 9
2.2 व्यवकलन 13
2.3 गुणन पर विचार 14
2.4 पूर्ण संख्याओं के लिए वितरण गुण 18
2.5 विभाजन 19
विविध प्रश्नावली I 22

III पूर्णांक ... 24

3.1 पूर्णांकों की आवश्यकता 24
3.2 निरपेक्ष मान 27

IV पूर्णांकों पर संक्रियाएँ ... 29

4.1 पूर्णांकों का योग 29
4.2 पूर्णांक का ऋणात्मक 34
4.3 पूर्णांकों का व्यवकलन 35
4.4 पूर्णांकों का गुणन 37
4.5 पूर्णांकों का विभाजन 42
विविध प्रश्नावली II 44

V पूर्णांकों की घातें ... 46

5.1 पूर्णांकों की घातें 47
5.2 वर्गमूल 48

VI संख्याओं के गुण ... 51

6.1 गुणनखंड और गुणन 51
6.2 अभाज्य और भाज्य संख्याएँ 52
6.3 अभाज्य गुणनखंड 55
6.4 संख्याओं से विभाज्य होने की जाँच 56
विविध प्रश्नावली III 60

VII पूर्णांकीय गुणांकों के बीजीय व्यंजक ... 63

7.1 अंकगणित से बीजगणित 63
7.2 बीजीय व्यंजकों का योग और व्यवकलन 65
7.3 समूहन संकेतों का प्रयोग 67
7.4 बीजीय व्यंजकों का गुणन 70
7.5 व्यंजक का मान निकालना 72

VIII समीकरणों का परिचय ... 74

8.1 अज्ञात राशियाँ व्यक्त करने में अक्षरों का प्रयोग 74
8.2 समीकरण हल करना 76
8.3 समस्याएँ हल करने में समीकरणों का प्रयोग 78
विविध प्रश्नावली IV 82

IX अनुपात, प्रतिशतता और उनके अनुप्रयोग 85

9.1 अनुपात 85
9.2 समानुपात 87
9.3 अनुक्रमानुपात 90
9.4 व्युत्क्रमानुपात 93
9.5 प्रतिशतता 95
9.6 लाभ और हानि 96
9.7 साधारण ब्याज 98

विषय सूची

X तल में आपतन गुण ... 101
10.1 भूमिका 101
10.2 तल, रेखाएँ और बिंदु 101
10.3 पहला आपतन गुण 103
10.4 दूसरा आपतन गुण 105
10.5 संरेखी बिंदु 105
10.6 संगामी रेखाएँ 106
10.7 इतिहास सम्बंधी एक टिप्पणी

XI रेखाखण्डों का मापन ... 109
11.1 रेखाखंड 109
11.2 रेखाखंडों की तुलना 110
11.3 रेखाखंडों का मापन 114
11.4 दी हुई लम्बाई का रेखाखंड खींचना 116
11.5 एक दी हुई रेखा से एक दिए हुए रेखाखंड की लम्बाई के बराबर रेखाखंड काटना 117
11.6 दो दिए हुए रेखाखंडों की लम्बाइयों के योग के बराबर लम्बाई का रेखाखंड खींचना 118
11.7 दो दिए हुए रेखाखंडो की लम्बाइयों के अंतर के बराबर लम्बाई का रेखाखंड खींचना 118

XII कोण ... 120
12.1 किरण 120
12.2 कोण 121
12.3 कोणों की तुलना 124
12.4 कोणों की अंशीय माप 125
12.5 चाँदा और उसके उपयोग 126
12.6 कोणों के प्रकार 129
12.7 कोणों का युग्म 129
12.8 सेट स्क्वायर 132
12.9 विभिन्न रचनाओं में सेट स्क्वायर का उपयोग 133

XIII समांतर रेखाएँ ... 136
13.1 समांतर रेखाएँ 136
13.2 तिर्यक रेखा 138
13.3 दो रेखाओं से तिर्यक रेखा द्वारा बनाए गए कोण 139
13.4 दो समांतर रेखाओं से तिर्यक रेखा द्वारा बनाए गए कोण 140
13.5 सेट स्क्वायर से कुछ और रचनाएँ 142

XIV त्रिभुज ... 147
14.1 त्रिभुज 147
14.2 त्रिभुज का अभ्यंतर और बहिर्भाग 148
14.3 त्रिभुज के कोणों का योग 149
14.4 न्यून कोण, समकोण और अधिक कोण त्रिभुज 150
14.5 विषमबाहु, समद्विबाहु और समबाहु त्रिभुज 152
14.6 त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग 152

XV वृत्त ... 154

15.1 वृत्त 154
15.2 चाप और जीवाएँ 155
15.3 वृत्त का अभ्यंतर और बहिर्भाग 158
15.4 वृत्त-खंड और त्रिज्यखंड 159

XVI परकार से कुछ रचनाएँ ... 161

16.1 एक दिए हुए कोण के बराबर कोण बनाना 161
16.2 दिए हुए कोण को समद्विभाजित करना 162
16.3 एक वृत्तीय क्षेत्र को छः बराबर त्रिज्यखंडों में विभाजित करना 163
16.4 60° का कोण बनाना 164
16.5 90° का कोण बनाना 165
16.6 एक दी हुई रेखा के बाहर एक दिए हुए बिंदु से होकर उस रेखा के समांतर एक रेखा खींचना 166
16.7 त्रिभुज की रचना करना जब कि उसकी तीनों भुजाएँ दी हुई हैं 167

XVII बहुफलकों की पहिचान ... 169

17.1 भूमिका 169
17.2 समतल आकृतियों की सर्वांगसमता 169
17.3 सम बहुभुज 170
17.4 ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दिशाएँ 170
17.5 घनाभ 171
17.6 घन 173
17.7 लम्ब प्रिज्म 175
17.8 पिरामिड 176
17.9 बहुफलक 178

XVIII रैखिक सममिति ... 180

18.1 भूमिका 180
18.2 रेखा के सापेक्ष सममिति 181
18.3 सममित आकृतियों के युग्मों के कुछ गुण 185
18.4 सममित आकृतियाँ 187
18.5 रचनाएँ 193

उत्तरमाला ... 196

पारिभाषिक शब्द सूची ... 207

एकक I

धनपूर्णांक और पूर्ण संख्याएँ

आप पिछली कक्षाओं में धनपूर्णांक (*natural numbers*) और पूर्ण संख्याओं (*whole numbers*) के कुछ तथ्यों और गुणों के विषय में पहले ही पढ़ चुके हैं। इनमें से कुछ तथ्यों और गुणों का हम इस एकक में पुनरावलोकन करेंगे।

1.1 धनपूर्णांक

आपको अपनी छठी कक्षा के लिए कितनी पुस्तकें खरीदनी पड़ीं? आपके परिवार में कितने सदस्य हैं? एक सप्ताह में कितने दिन होते हैं? अंग्रेजी वर्णमाला में कितने अक्षर हैं? उपर्युक्त प्रश्नों के उत्तर में संख्याओं का प्रयोग करना पड़ेगा। आप कह सकते हैं कि आपको छठी कक्षा के लिए **आठ** पुस्तकें खरीदनी पड़ीं या कि आपके परिवार में **पाँच** सदस्य हैं। आप जानते हैं कि एक सप्ताह में **सात** दिन होते हैं तथा अंग्रेजी वर्णमाला में **छब्बीस** अक्षर होते हैं।

उपर्युक्त उदाहरणों में संख्याएँ आठ, पाँच, सात, छब्बीस **धनपूर्णांक** हैं। इनके अतिरिक्त और भी अनेक धनपूर्णांक हैं जैसे कि एक, दो, तीन इत्यादि। इन संख्याओं का किसी संग्रह (*collection*) की वस्तुएँ गिनने या गणन (*count*) करने में प्रयोग किया जाता है। इसलिए इन संख्याओं को **गणन संख्याएँ** (*counting numbers*) भी कहते हैं।

यदि आपकी कक्षा में आंध्रप्रदेश का कोई विद्यार्थी है तथा यदि उससे पूछा जाता है कि उसे छठी कक्षा के लिए कितनी पुस्तकें खरीदनी पड़ीं तो वह कह सकता है कि **एनिमिडी** (*Enimidi*)। **एनिमिडी** तेलगु भाषा का शब्द है जिसका अर्थ है **आठ**। संख्या **आठ** के अलग अलग भाषाओं में अलग अलग नाम हैं जैसे कि तामिल में **एट्टू** (*Ettu*), अंग्रेजी में **एट** (*Eight*), संस्कृत में **अष्ट** (*Ashta*), जर्मन में **आच्ट** (*Acht*)। इसी प्रकार प्रत्येक संख्या के विभिन्न भाषा में विभिन्न नाम* होते हैं।

***अध्यापक के लिए निर्देश**

[कक्षा में करने योग्य गतिविधि (*activity*) के लिए सुझाव]

प्रत्येक विद्यार्थी को सुझाव दीजिए कि वह जितनी भी भाषाओं में हो सके अपने साथियों, पड़ोसियों और मित्रों से संख्याओं एक से दस तक के विभिन्न नामों का पता लगाए। तब इस सूचना को कक्षा में इकट्ठा करके एक सारणी के रूप में प्रस्तुत करें। इसके बाद एक चार्ट बनाया जा सकता है और उसे कक्षा में प्रदर्शित किया जा सकता है।

1.2 संख्या और संख्यांक

नामों के अतिरिक्त लेखन कार्य में, हम संख्याएँ निरूपित करने के लिए संकेतों का प्रयोग करते हैं। ये संकेत भी अलग अलग भाषाओं में अलग अलग प्रकार के हैं। उदाहरणार्थ संख्या **तीन** को हिन्दी में ३, अंग्रेजी में 3, उर्दू में ۳ लिखते हैं।' यदि आज प्राचीनकालीन मिस्र का कोई व्यक्ति जीवित आ जाए तो वह तीन के लिए लिखे गए उपर्युक्त संकेतों में किसी को भी नहीं पहचानेगा और वह तीन को निरूपित करने के लिए संकेत ||| का प्रयोग करेगा।

संख्याओं के संकेतों* को **संख्यांक** (*numerals*) कहते हैं। [इस प्रकार, संख्याओं और उनके संख्या-संकेतों अर्थात् संख्यांकों में अंतर है। परन्तु इस स्तर पर हम इन दोनों संकल्पनाओं (*concepts*) के इस अंतर पर कोई महत्व नहीं देंगे।]

1.3 स्थानीय मान तथा अंक *0*

जब 'छोटे' संग्रहों तक ही गिनना सीमित था तो विभिन्न गणन संख्याओं के लिए विभिन्न संख्याओं का प्रयोग करना संभव था। परन्तु जब बड़े बड़े संग्रहों के गिनने की आवश्यकता हुई तो प्रत्येक गणन संख्या के लिए एक भिन्न संकेत रखना असुविधाजनक प्रतीत हुआ। इसके लिए क्रमशः वस्तुओं के निश्चित साइज़ के छोटे संग्रह या समुच्चय बनाने के सिद्धान्त पर आधारित एक विधि का विकास हुआ।

उदाहरणार्थ, मिस्रवासियों ने दस दस वस्तुओं के संग्रहों का प्रयोग किया। उन्होंने संख्या **दस** को ∩ से निरूपित किया। तब **ग्यारह** को ∩| (अर्थात् दस और एक) लिखा गया। **बारह** को ∩|| से निरूपित किया गया, इत्यादि। **उन्नीस** को ∩||||| |||| तथा **बीस** को ∩∩ लिखा गया। **सौ** के लिए संकेत 𓍢 का प्रयोग किया गया। यद्यपि यह विधि पहली विधियों से अच्छी थी परन्तु फिर भी बड़ी संख्याओं को निरूपित करने के लिए यह विधि बहुत ही असुविधाजनक थी।

संख्याओं को संख्या-संकेतों से 'निरूपित करने की एक बहुत ही सुविधाजनक विधि जो कि आजकल बहुधा प्रयोग की जाती है **स्थानीय मान** (*place value*) की संकल्पना पर आधारित है। इस विधि का आविष्कार प्राचीन हिन्दू गणितज्ञों ने किया और अरबवासियों ने इसे पश्चिमी देशों तक पहुँचाया। इस विधि को **हिन्दू-अरेबिक अंकन पद्धति** (*Hindu-Arabic System of Numeration*) कहते हैं। आजकल, संसार के अधिकतर देश इसी विधि का प्रयोग करते हैं। अतः इस पद्धति को **अंतर्राष्ट्रीय अंकन पद्धति** (*International System of Numeration*) कहना उपयुक्त होगा।

इस पद्धति में मूल संग्रह का साइज 'दस' चुना गया है। यह शायद इसलिए कि जब मानव को पहले पहल गिनने की आवश्यकता प्रतीत हुई तो उसने अपने दोनों हाथों की उंगलियों का प्रयोग किया था। अतः दस 'एकक' (*unit*) से एक 'दस' बनता है, दस 'दस' से एक 'सौ' बनता है, दस

---

*अध्यापक के लिए निर्देश

(कक्षा में करने योग्य गतिविधि के लिए सुझाव)

प्रत्येक विद्यार्थी को सुझाव दीजिए कि वह जितनी भी भाषाओं में हो सके अपने साथियों, पड़ोसियों और मित्रों से संख्याओं एक से दस तक के लिए विभिन्न संख्या-संकेतों का पता लगाए। तब इस सूचना को कक्षा में इकट्ठा करके एक सारणी के रूप में प्रस्तुत करें। इसके बाद एक चार्ट बनाया जा सकता है और उसे कक्षा में प्रदर्शित किया जा सकता है।

'सौ' से एक 'हज़ार' बनता है, इत्यादि। **एकक स्थान** (*unit's place*) **से प्रारम्भ कर और उसके** बाईं ओर को चलते हुए उपर्युक्त संग्रहों में से प्रत्येक को क्रम से एक एक स्थान (*place*) **निर्दिष्ट किया** गया है। इस प्रकार, एकक स्थान से ठीक बाईं ओर पहले **दस का स्थान** (*ten's place*) है, दस के स्थान से ठीक बाईं ओर पहले **सौ का स्थान** (*hundred's place*) है, इत्यादि।

सुविधा की दृष्टि से हम नीचे इन स्थानों को एक चार्ट* के रूप में निरूपित कर रहे हैं :

दस करोड़ 10,00,00,000	करोड़ 1,00,00,000	दस लाख 10,00,000	लाख 1,00,000	दस हज़ार 10,000	हज़ार 1,000	सौ 100	दस 10	एकक 1
10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	1

संख्याओं को अब संकेतों 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 का प्रयोग करके निरूपित किया जा सकता है। इनमें प्रत्येक संकेत का मान उसके द्वारा धारित स्थान पर निर्भर करता है। उदाहरणार्थ संख्या **एक सौ तेइस** एक सौ, दो दस, और तीन एकक के संग्रह को निरूपित करती है।

आपको स्मरण होगा कि इसे सौ के स्थान पर 1, दस के स्थान पर 2 तथा एकक के स्थान पर 3 रखकर लिखा जाता है और इस प्रकार हमें संकेत 123 प्राप्त होता है। एक सौ तीन वस्तुओं के संग्रह के विषय में आप क्या कहेंगे ? इस संग्रह में एक सौ, कोई दस नहीं तथा तीन एकक हैं। निश्चय ही इस संग्रह को संकेत 13 से निरूपित करना सही नहीं होगा। (क्यों?) हमें तीनों स्थानीय मानों अर्थात् 'सौ', 'दस' और 'एकक' का प्रयोग करना चाहिए। साथ ही हमारे पास एक संकेत यह निरूपित करने के लिए होना चाहिए कि इस संग्रह में एक भी दस नहीं है। यह हमें एक अतिरिक्त संकेत '0' (शून्य) शामिल करने से प्राप्त होता है। जिस स्थान के संगत कोई संग्रह न हो उस स्थान को दर्शाने के लिए 0 का एक स्थान धारक (*place holder*) के रूप में प्रयोग किया जाता है। संस्कृत में भी इसे शून्य कहते हैं जिसका अर्थ है **रिक्त** (*empty*)। इससे यह संकेत मिलता है कि शून्य द्वारा धारित स्थान रिक्त है। इस प्रकार **एक सौ तीन** को संकेत 103 से निरूपित किया जाता है।

यद्यपि स्थानीय मान की संकल्पना का प्रयोग दूसरे देशों जैसे कि बेबीलोनिया के निवासियों द्वारा प्रारम्भ किया गया परन्तु इस बात का श्रेय हिन्दुओं द्वारा आविष्कारित अंक 0 को है जिसकी सहायता से एक बहुत ही उपयोगी अंकन पद्धति का निर्माण हुआ।

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 और 0 में से प्रत्येक संकेत को **अंक** (*digit*) कहते हैं। 45, दो अंकों की संख्या (या संख्यांक) है, 127, तीन अंकों की संख्या है, 8, एक अंक की संख्या है।

जब किसी संख्या में एक से अधिक अंक होते हैं तो प्रत्येक अंक का मान उसके स्थान के अनुसार होता है। इस प्रकार, प्रत्येक अंक का **अंकित मान** (*face value*) के साथ साथ **स्थानीय मान** (*place value*) भी होता है। किसी अंक विशेष का अंकित मान सदैव समान रहता है चाहे वह

*हमने चार्ट में संकेतनों 10^1, 10^2, 10^3, इत्यादि का प्रयोग किया है। आपको याद होगा कि $10^1=10$, $10^2=10\times10$, $10^3=10\times10\times10$, इत्यादि।

किसी भी स्थान पर आए। उदाहरणार्थ, संख्या 127 में 2 का अंकित मान 'दो' है जबकि उसका स्थानीय मान 2×10 अर्थात् 20 है।

अब, स्थानीय मान के सिद्धान्त का उपयोग करते हुए किसी भी संख्या को उसके विभिन्न अंकों के स्थानीय मानों के **सूचित योग** (*indicated sum*) के रूप में लिखा जा सकता है। उदाहरणार्थ,

$$\begin{aligned} 3127 &= 3\times 10^3 + 1\times 10^2 + 2\times 10^1 + 7\times 1 \\ &= 3\times 1000 + 1\times 100 + 2\times 10 + 7\times 1 \\ &= 3000 + 100 + 20 + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2024769 &= 2\times 10^6 + 0\times 10^5 + 2\times 10^4 + 4\times 10^3 + 7\times 10^2 + 6\times 10 + 9\times 1 \\ &= 2\times 1000000 + 0\times 100000 + 2\times 10000 + 4\times 1000 + \\ &\quad 7\times 100 + 6\times 10 + 9\times 1 \\ &= 2000000 + 20000 + 4000 + 700 + 60 + 9 \end{aligned}$$

जब कोई संख्या सूचित योग के रूप में लिख दी जाती है, जैसा कि ऊपर दिखाया गया है, तो हम कहते हैं कि हमने संख्या को **प्रसारित संकेतन** (*expanded notation*) में व्यक्त कर दिया है।

किसी संख्या को लिखते समय यह परम्परागत है कि सबसे बड़े स्थान पर 0 को छोड़ कर काइ और अंक लिखा जाता है। उदाहरणार्थ संख्या **छःसौ पच्चीस** को 0625 न लिखकर 625 लिखा जाएगा।

प्रश्नावली 1.1

1. निम्न में से प्रत्येक में 'सात' का स्थानीय मान क्या है ?
   (i) 1070 (ii) 560897 (iii) 7000902 (iv) 70000000
2. संख्या 80475 में 4 और 7 के स्थानीय मानों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।
3. संख्या 6213 में 2 के स्थानीय मान और अंकित मान का अंतर ज्ञात कीजिए।
4. वह अंक निर्धारित कीजिए जिसका 7210 में स्थानीय मान 10 है।
5. निम्न में से प्रत्येक के तदनुरूपी संख्या लिखिए :
   (i) $5\times 1000 + 3\times 100 + 2\times 10 + 6\times 1$
   (ii) $7\times 1000000 + 8\times 10000 + 9\times 100 + 5\times 10 + 2\times 1$
   (iii) $2\times 10^6 + 3\times 10^3 + 8\times 10^2 + 1\times 1$

6. निम्न में से प्रत्येक को प्रसारित संकेतन में लिखिए :

   (i) 2406 (ii) 15968 (iii) 400000 (iv) 11010101

7. अंकों 3, 5, 7 का प्रयोग करते हुए 3 अंकों की सभी संभव संख्याएँ लिखिए जबकि एक अंक एक संख्या में केवल एक ही बार प्रयोग किया जाता है। इन संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

8. अंकों 4, 2, 8, 6 का प्रयोग करते हुए 4 अंकों की कोई भी पाँच संख्याएँ लिखिए जबकि एक अंक संख्या में केवल एक ही बार प्रयोग किया जाता है।

9. अंकों 9, 2 और 0 का प्रयोग करते हुए 3 अंकों की कितनी विभिन्न संख्याएँ बनाई जा सकती हैं जबकि कोई भी अंक दोहराया न जाए ?

10. 5 अंकों की एक ऐसी संख्या लिखिए जिसके अंकों को उलटे क्रम में लिखने पर संख्या में कोई परिवर्तन न हो। संख्या को पढ़िए।

11. 4 से लेकर 98 तक के सभी घनपूर्णांकों में एकक स्थान पर अंक 5 कितनी बार आता है ?

1.4 संख्या-शून्य

हम यह देख चुके हैं कि किस प्रकार एक स्थान धारक के रूप में संकेत '0' को शामिल करके, स्थानीय मान के सिद्धान्त पर हम किसी भी संख्या को, चाहे वो कितनी भी बड़ी हो, लिखने में समर्थ हो सके। अंक '0' से भिन्न परन्तु उतनी ही आवश्यक **संख्या शून्य** (*number zero*) की संकल्पना है।

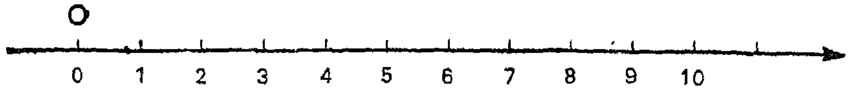
यदि आपको उपहार में एक टॉफियों का डिब्बा मिले और आप सभी टॉफियों को अपने मित्रों में बाँट दें तो डिब्बे में कितनी टॉफियाँ शेष रहेंगी ? कोई नहीं ! या यदि आपकी कक्षा की समाप्ति पर सभी विद्यार्थी कक्षा से बाहर चले जाएँ तो कक्षा में कितने विद्यार्थी शेष रहेंगे ? कोई नहीं ! स्पष्ट है कि डिब्बे में शेष बची हुई टॉफियों या कक्षा में शेष बचे हुए विद्यार्थियों की संख्या व्यक्त करने के लिए किसी भी गणन संख्या का प्रयोग नहीं किया जा सकता। अतः ऐसे संग्रह के अवयवों की संख्या, जिसकी सभी वस्तुओं को बाहर निकाल लिया गया है, को भी व्यक्त करने की आवश्यकता है। ऐसे संग्रहों के अवयवों की संख्या को व्यक्त करने के लिए **संख्या शून्य** (जिसे संकेत '0' द्वारा व्यक्त किया जाता है) का प्रयोग किया जाता है।

संख्या '0' और गणन संख्याएँ (या घनपूर्णांक) 1, 2, 3, ... मिलकर एक समुच्चय बनाते हैं जिसे **पूर्ण संख्याओं का समुच्चय** (*set of whole numbers*) कहते हैं। इस प्रकार पूर्ण संख्याएँ हैं : **0, 1, 2, 3, 4, 5, ...** ।

1.5 पूर्ण संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण

पूर्ण संख्याओं को **संख्या रेखा** (*number line*) पर निरूपित करना बहुत उपयोगी है। इस निरूपण से संख्याओं के कुछ गुण खोजने में सहायता मिलती है। आप यह जानते ही हैं कि संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याएँ किस प्रकार निरूपित करते हैं। हम यहाँ संक्षेप में इस विधि का पुनरावलोकन करेंगे।

हम एक रेखा खींचते हैं और उस पर कहीं भी एक बिंदु O अंकित कर लेते हैं। अब O से प्रारम्भ कर और उसके दाईं ओर बराबर दूरियों पर हम एक के बाद एक निशान लगाते हैं। (देखिए आकृति 1.1)



आकृति 1.1 : पूर्ण संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण

बिंदु O पर 0 लिख दिया जाता है। अन्य बिंदुओं पर क्रम से 1, 2, 3,... लिख देते हैं जैसा कि आकृति 1.1 में दिखाया गया है। हम देखते हैं कि इस प्रकार से हम **किसी भी** पूर्ण संख्या को **संख्या रेखा** पर **निरूपित** कर सकते हैं।

हम यह भी देखते हैं कि **दो, एक से** 'एक अधिक' है, **तीन, दो से** 'एक अधिक' है, **चार, तीन से** 'एक अधिक' है, इत्यादि।

दो, एक का **परवर्ती** (*successor*) कहलाता है, तीन, दो का **परवर्ती** कहलाता है, इत्यादि। प्रत्येक गणन संख्या का **एक और केवल एक परवर्ती** अर्थात् गणितज्ञ की भाषा में **एक अद्वितीय परवर्ती** (*a unique successor*) होता है।

क्या कोई सबसे बड़ी गणन संख्या है? क्या कोई सबसे बड़ी पूर्ण संख्या है? इन दोनों प्रश्नों का उत्तर है: **नहीं**! क्यों? यह इसलिए कि 'एक अधिक' की प्रक्रिया बिना किसी अंत के चल सकती है।

एक बार संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित करने के बाद उनकी तुलना सरलता से की जा सकती है। उदाहरणार्थ,

$2 > 1$, चूँकि 2, 1 के दाईं ओर स्थित है;

$3 > 2$, चूँकि 3, 2 के दाईं ओर स्थित है;

$4 > 1$, चूँकि 4, 1 के दाईं ओर स्थित है, इत्यादि।

साथ ही, $2 < 3$, चूँकि 2, 3 के बाईं ओर स्थित है;

$3 < 4$, चूँकि 3, 4 के बाईं ओर स्थित है;

$2 < 5$, चूँकि 2, 5 के बाईं ओर स्थित है;

$0 < 6$, चूँकि 0, 6 के बाईं ओर स्थित है, इत्यादि।

परन्तु यदि हमसे यह पूछा जाए कि 112 और 326 में कौन सी संख्या छोटी है तो हम क्या करेंगे ? निश्चय ही, ऐसी बड़ी संख्याओं को पहले संख्या रेखा पर निरूपित करना और फिर उनकी पारस्परिक स्थितियाँ देखना अव्यावहारिक होगा। परन्तु फिर भी संख्या रेखा से हमें इस समस्या के हल के लिए कुछ संकेत अवश्य मिल जाता है। आइए देखें।

जब $2 < 3$, तो हमें किसी ऐसे धनपूर्णांक की आवश्यकता है जिसे 2 में जोड़ने से योग 3 हो जाए (इस स्थिति में यह धनपूर्णांक 1 है : $2+1=3$);

जब $3 < 4$, तो हमें किसी ऐसे धनपूर्णांक की आवश्यकता है जिसे 3 में जोड़ने से योग 4 हो जाए (इस स्थिति में यह धनपूर्णांक 1 है : $3+1=4$);

जब $2 < 5$, तो हमें धनपूर्णांक 3 की आवश्यकता है जिससे कि $2+3=5$;
जब $0 < 6$, तो हमें धनपूर्णांक 6 की आवश्यकता है जिससे कि $0+6=6$।

दूसरे शब्दों में, यदि दो (असमान) पूर्ण संख्याएँ दी हुई हों तो इनमें से वह पूर्ण संख्या **छोटी** होती है जिसमें कोई धनपूर्णांक जोड़ने से योग दूसरी पूर्ण संख्या के बराबर हो जाए।

इस प्रकार, 112 और 326 में 112 छोटी है चूँकि $112+214=326$। संख्या रेखा से **मध्य-स्थिति** (*betweenness*) का गुण भी प्रदर्शित होता है। उदाहरणार्थ, 3, संख्याओं 2 और 4 के **मध्य** (*between*) स्थित है, 8, 5 और 9 के **मध्य** स्थित हैं। हम लिखते हैं: $2 < 3 < 4$, $5 < 8 < 9$।

उदाहरण 1: 4 अंकों की छोटी से छोटी और बड़ी से बड़ी पूर्ण संख्याएँ लिखिए।

हल: 4 अंकों की **छोटी** से छोटी संख्या के लिए हजार के स्थान पर सबसे छोटा शून्येतर (*non-zero*) अंक होना चाहिए। निस्संदेह यह 1 है। अतः सौ, दस और एकक के स्थानों में से प्रत्येक पर सबसे छोटे अंक अर्थात् 0 की आवश्यकता है। इस प्रकार, 4 अंकों की सबसे छोटी संख्या 1000 है। 4 अंकों की सबसे बड़ी संख्या के लिए यह स्पष्ट है कि प्रत्येक स्थान पर सबसे बड़ा अंक होना चाहिए। निस्संदेह, सबसे बड़ा अंक 9 है। अतः 4 अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या 9999 है।

उदाहरण 2: अंकों 0, 1 और 4 का प्रयोग करते हुए 3 अंकों की छोटी से छोटी एवं बड़ी से बड़ी संख्याएँ बनाइए जबकि कोई अंक दोहराया न जाए।

हल: छोटी से छोटी संख्या के लिए हम सौ के स्थान पर अंक 0 नहीं ले सकते। (क्यों ?) इस स्थान पर 1 होना चाहिए। (क्यों ?) दस और एकक के स्थान पर क्रमशः 0 और 4 होना चाहिए। इस प्रकार छोटी से छोटी संख्या 104 है। बड़ी से बड़ी संख्या 410 है।

प्रश्नावली 1.2

1. संख्याओं 7, 14, 189 तथा 8645 के परवर्ती लिखिए।
2. पूर्ण संख्याओं के समुच्चय में 0 का परवर्ती क्या है ?
3. 8 और 9 क मध्य कितने धनपूर्णांक हैं ?

4. 1 और 8 के मध्य कितनी पूर्ण संख्याएँ हैं?

5. सबसे छोटा धनपूर्णांक बताइए।

6. निम्न को लिखने के लिए संकेतों '>' या '<' का प्रयोग कीजिए :

(i) 73, 61 से अधिक है,

(ii) 18, 29 से कम है,

(iii) 59, 57 और 63 के मध्य स्थित है,

(iv) 0 किसी भी धनपूर्णांक से कम है।

7. निम्न संख्या युग्मों की तुलना कीजिए। प्रत्येक युग्म में बताइए कि कौन सी संख्या छोटी है।

(i) 68708, 69006 (ii) 80008, 78888

(iii) 300000, 3000 (iv) 5555, 0

8. 6 अंकों की 5 पर अंत होने वाली छोटी से छोटी संख्या तथा 2 पर अंत होने वाली बड़ी से बड़ी संख्या लिखिए।

9. अंकों 6, 0, 3, 5 का प्रयोग करते हुए 4 अंकों की बड़ी से बड़ी तथा छोटी से छोटी संख्याएँ लिखिए जबकि प्रत्येक अंक संख्या में केवल एक ही बार प्रयोग किया जाता है।

10. सभी अंकों 4, 1, 9, 7, 5, 2 का प्रयोग करते हुए बड़ी से बड़ी और छोटी से छोटी पूर्ण संख्याएँ बनाइए जबकि प्रत्येक अंक एक संख्या में एक ही बार प्रयोग किया जाता है।

एकक II

पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाएँ

हम पहले से ही जानते है कि पूर्ण संख्याओं को किस प्रकार जोड़ा, घटाया, गुणा तथा भाग किया जाता है। आप अनौपचारिक रूप से इन संक्रियाओं के कुछ गुणों से भी परिचित हैं। इस एकक में हम इनमें से कुछ गुणों का पुनरावलोकन करेंगे।

2.1 योग पर विचार

आप यह भलीभांति जानते हैं कि दो **पूर्ण संख्याओं को किस प्रकार जोड़ा जाता है।** यदि संख्याएँ 'छोटी' हों तो हम अपने मन ही में इनको जोड़कर योग ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरणार्थ $4+5=9$ अन्यथा हम स्तम्भ विधि से योग (*column addition*) भी ज्ञात कर सकते है। उदाहरणार्थ,

$$\begin{array}{r} 409836 \\ +\ \ 83729 \\ \hline 493565 \\ \hline \end{array}$$

क्या दो संख्याओं के योग पर इसका कुछ अंतर पड़ता है कि हम इन संख्याओं को किस क्रम में जोड़ते हैं? दूसरे शब्दों में यदि हमें 21 और 36 का योग ज्ञात करना हो तो क्या इससे कुछ अंतर पड़ेगा कि हम 21 में 36 जोड़ते हैं या 36 में 21 जोड़ते हैं? नहीं!
इस प्रकार,

$$21+36=36+21$$

वास्तव में यह किन्हीं भी दो पूर्ण संख्याओं के लिए सत्य है। हम कहते हैं कि (पूर्ण संख्याओं का) **योग क्रमविनिमेय** (*commutative*) है। इतना इस गुण का नाम आवश्यक नही है जितना यह स्मरण रखना कि

किन्हीं दो संख्याओं का योग ज्ञात करने में इसका कोई महत्व नहीं है कि हम संख्याओं को किस क्रम में जोड़ते हैं।

अब यदि हम गणित की भाषा और उस भाषा को लें जिसका हम बोलने या लिखने में प्रयोग करते हैं तो हम इनमें एक महत्वपूर्ण अंतर यह देखेंगे कि गणित की भाषा में विशेष चिन्हों (signs) और संकेतों का प्रयोग किया जाता है। इनसे हमें अपने विचार संक्षेप और अच्छे से अच्छे रूप में व्यक्त करने में सहायता मिलती है। उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि हम किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं को

और b से व्यक्त करते हैं। अब इन चिन्हों और संकेतों का प्रयोग करने से **योग का क्रमविनिमेय ण** निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

यदि a और b कोई दो पूर्ण संख्याएँ हों तो

$$a+b=b+a$$

इस प्रकार हमने किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं के लिए (योग के) एक गुण को संक्षेप में और एक सुन्दर रीके से व्यक्त कर दिया।

यदि हम **योग के लिए एक संक्रिया सारणी** (*operation table for addition*) बना लें तो यह गुण र भी अच्छी प्रकार से समझा जा सकता है। आइए केवल पहली पांच पूर्ण संख्याएँ ही लें। : निम्न सारणी प्राप्त होगी :

दूसरी संख्या

	+	0	1	2	3	4
पहली संख्या	**0**	0	1	2	3	4
	1	1	2	3	4	5
	2	2	3	4	5	6
	3	3	4	5	6	7
	4	4	5	6	7	8

मुख्य विकर्ण

हम देखते है कि संक्रिया सारणी, मुख्य विकर्ण (*main diagonal*) के सापेक्ष सममित *metrical*) है। सारणी से यह सरलता से देखा जा सकता है कि $2+1=1+2$, $3=2+3$, $4+3=3+4$, इत्यादि।

हम सारणी से यह भी देखते हैं कि

$0+0=0$ ।

$0+1=1+0=1$

$0+2=2+0=2$

$0+3=3+0=3$

$0+4=4+0=4$

दूसरे शब्दों मे **शून्य और किसी पूर्ण संख्या का योग स्वयं वह पूर्ण संख्या होती है।** इस गुण **र का योज्य गुण** (*addition property of zero*) कहते हैं तथा 0 **योग के लिए तत्समक अवयव**

(*identity element for addition*) कहलाता है। पुनः नाम का यहाँ कोई महत्व नहीं है। इस स्तर पर आवश्यकता इस बात की है कि इस गुण का ज्ञान हो और इस ज्ञान को व्यावहारिक स्थितियों में प्रयोग में लाने की योग्यता हो।

संकेतों का प्रयोग कर हम इस गुण को निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

यदि a कोई पूर्ण संख्या हो, तो

$$0+a=a+0=a$$

अब यदि हमें **तीन संख्याओं को जोड़ना** हो तो हम क्या करेंगे ? आइए एक उदाहरण पर विचार करें। एक स्कूल एक विविध मनोरंजन कार्यक्रम आयोजित करता है। एक दिन सतीश ने 73, बीना ने 56 तथा रोहित ने 109 टिकट बेचे। मान लीजिए आपसे कहा जाता है कि बेचे गए टिकटों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए। आप शायद पहले 73 में 56 जोड़ेंगे और बाद में इस योग में 109 जोड़ देंगे। आपकी योग ज्ञात करने की इस विधि को निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है :

$$(73+56)+109=129+109=238$$

कोष्ठकों से तात्पर्य है कि पहले 73 और 56 को जोड़ना है।

आइए अब देखें कि यदि हम पहले 56 और 109 को जोड़ें और फिर योग में 73 जोड़ें तो हमें क्या योग प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में

$73+(56+109)$ का क्या मान है ? हम देखते हैं कि

$$73+(56+109)=73+165=238$$

इस प्रकार,

$$(73+56)+109=73+(56+109)$$

उपर्युक्त उदाहरण से (पूर्ण संख्याओं के) योग का एक अन्य महत्वपूर्ण गुण स्पष्ट होता है, वह यह कि **योग सहचारी** (*associative*) **होता है**। पुनः नाम का इतना महत्व नहीं है जितना यह स्मरण रखने का कि

किन्हीं तीन पूर्ण संख्याओं का योग ज्ञात करने में इस बात से कोई अंतर नहीं पड़ता कि पहले हम कौन सी दो संख्याएं लेते हैं और फिर उनके योग में अंतिम संख्या जोड़ते हैं।

चिन्हों और संकेतों का प्रयोग कर हम योग के **साहचर्य गुण** (*associative property*) को निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

यदि a, b और c कोई तीन पूर्ण संख्याएं हों तो

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

इस गुण के फल स्वरूप ही हम प्रायः इन समान योगों को $a+b+c$ लिखते हैं।

आइए एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : 433, 567 तथा 2698 का योग ज्ञात कीजिए।

हल : स्पष्ट है कि पहले 433 और 567 को जोड़कर उनके योग में 2698 जोड़ कर योग ज्ञात करना अपेक्षाकृत सरल है। हम देखते हैं कि

$$(433+567)+2698=1000+2698=3698$$

[यदि हमने निम्न क्रिया स योग ज्ञात किया होता तो हमें योग ज्ञात करने में कुछ कठिनाई प्रतीत होती।

$$433+(567+2698)=433+3265=3698]$$

अंत में, हम **चार या उससे अधिक संख्याओं का योग** किस प्रकार ज्ञात करते हैं? हम योग के क्रमविनिमेय और साहचर्य गुणों का, यदि आवश्यक हो तो कई बार, प्रयोग करते हैं। इस स्तर पर यह आवश्यक नहीं कि हम प्रत्येक पग (step) पर इन गुणों का प्रयोग बताते जाएं। इस संदर्भ में जो महत्वपूर्ण है वह है 'इस प्रयोग का परिणाम'। परिणाम है कि

यदि कई संख्याएँ दी हुई हों तो यह आवश्यक नहीं कि उनको उसी क्रम में जोड़ा जाए जिसमें वे दी हुई हैं। हम उनके सरलतम समूह बनाकर उनका योग ज्ञात कर सकते हैं। यह गुण **योग का पुनर्व्यवस्थितकरण गुण (rearrangement property of addition)** कहलाता है।

उदाहरणार्थ, 27, 423, 73, 56 और 77 का योग हम निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं:

$$27+423+73+56+77=(27+73)+(423+77)+56$$
$$=100+500+56$$
$$=656$$

या, $27+423+73+56+77=(27+423)+73+56+77$
$$=(450+73)+56+77$$
$$=(523+56)+77$$
$$=579+77$$
$$=656$$

स्पष्ट है कि, योग ज्ञात करने की दूसरी विधि अपेक्षाकृत कम सुविधाजनक है।

प्रश्नावली 2.1

1. (क) कोई दो विषम संख्याएँ लीजिए और उनका योग ज्ञात कीजिए। यह योग सम है या विषम?

   (ख) कोई दो सम संख्याएँ लीजिए और उनका योग ज्ञात कीजिए। यह योग सम है या विषम?

2. योग ज्ञात कीजिए: (सबसे उपयुक्त संयोग प्रयोग कीजिए।)
   (क) 709, 386, 3291
   (ख) 2062, 353, 1438, 547
   (ग) 1849, 2608, 1784, 3377, 2051

3. यदि हम दो 3 अंकों की संख्याओं को जोड़ें तो योग में अधिकतम कितने अंक संभव हैं? न्यूनतम कितने अंक संभव हैं?

*4. आइए (पूर्ण संख्याओं के लिए) एक ऐसी संक्रिया '$\oplus$' खोजें जिसका अर्थ है, "पहली संख्या का दुगुना करके उसमें दूसरी संख्या का तिगुना जोड़ दें।" इस प्रकार, $2 \oplus 3 = 4 + 9 = 13$, $0 \oplus 1 = 0 + 3 = 3$, इत्यादि।

(क) $0 \oplus 4$ का क्या अर्थ है? $1 \oplus 2$ का क्या अर्थ है? $2 \oplus 5$ का क्या अर्थ है?

(ख) क्या $2 \oplus 3 = 3 * 2$ है? दूसरे शब्दों में क्या $\oplus$ एक क्रमविनिमेय संक्रिया है?

5. चित्र में दिए हुए मैजिक वर्ग* (*magic square*) पर विचार कीजिए जिसमें प्रत्येक पंक्ति, प्रत्येक स्तंभ एवं प्रत्येक विकर्ण के योग समान है।

(क) पहले स्तंभ की संख्याओं का क्या योग है?

(ख) मैजिक वर्ग पूर्ण कीजिए।

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2.2 व्यवकलन

आप पहले ही से परिचित हैं कि एक पूर्ण संख्या में से दूसरी पूर्ण संख्या किस प्रकार घटाते या व्यवकलित (*subtract*) करते हैं। उदाहरणार्थ, क्या आपको स्मरण है कि जब आपको $9 - 5$ ज्ञात करना था तो आपने क्या किया था?

आपने नौ में से पांच 'बाहर निकाल लिया' होगा। या आपने स्वयं से ही प्रश्न किया होगा, "9 प्राप्त करने के लिए मुझे 5 में क्या जोड़ना चाहिए?" प्रत्येक स्थिति में उत्तर 4 है। हाँ, दूसरी स्थिति में 9 में से 5 **व्यवकलित** करने का अर्थ वही है जो कि ऐसी संख्या ज्ञात करने का जिसे 5 में **जोड़ने** पर 9 प्राप्त हो जाए। इसी कारण से **व्यवकलन** (*subtraction*), **योग का प्रतिलोम** (*inverse*) कहलाता है। इस प्रकार एक व्यवकलन प्रश्न के उत्तर की सत्यता, तदनुरूपी योग की सहायता से जाँच की जा सकती है।

अतः हम देखते हैं कि कथन $4 + 5 = 9$ को दूसरे प्रकार से लिखने की विधि $9 - 5 = 4$ है।

अभी तक हम केवल पूर्ण संख्याओं के विषय में ही जानते हैं। क्या आप एक पूर्ण संख्या में से दूसरी पूर्ण संख्या सदैव घटा सकते हैं। नहीं! उदाहरणार्थ हम अभी तक यह नहीं जानते कि 9 में से 11 या 18 में से 23 किस प्रकार घटाएँ। दूसरे शब्दों में **यदि हम अपने को केवल पूर्ण संख्याओं तक ही सीमित**

***अध्यापक के लिए निर्देश**

(कक्षा में करने योग्य गतिविधि के लिए सुझाव)

उपर्युक्त एक 3×3 मैजिक वर्ग का उदाहरण है। संख्याओं को बिना दोहराए हुए 1 से 9 तक की संख्याओं से जो 3×3 मैजिक वर्ग बनता है उसमें प्रत्येक पंक्ति, स्तंभ और विकर्ण का योग 15 होता है। विद्यार्थियों से कहिए कि वे बिना दोहराए हुए 1 से 9 तक की संख्याओं का प्रयोग करके अनेक मैजिक वर्ग बनाएँ।

विद्यार्थियों को यह खोजने का अवसर दें कि जब 2 से 10 तक, या 3 से 11 तक, या 4 से 12 तक, इत्यादि की संख्याएँ प्रयोग की जाती हैं तो क्या होता है। प्रत्येक दशा में हमें कितना योग प्राप्त होता है?

रखें तो हम एक छोटी संख्या में से बड़ी संख्या को नहीं घटा सकते। केवल छोटी संख्याएँ ही बड़ी संख्याओं में से घटाई जा सकती हैं।
क्या 9—5=5—9 है? क्या 123—98=98—123 है? नहीं।
वास्तव में, 5—9 या 98—123 को ज्ञात भी नहीं किया जा सकता है, चूंकि हम एक छोटी संख्या में से बड़ी संख्या को घटा नहीं सकते।

प्रश्नावली 2.2

1. निम्न व्यवकलन पूरे कीजिए। तदनुरूपी योग की सहायता से अपने उत्तर की जाँच कीजिये।
   (क) 736—214
   (ख) 1263—989
   (ग) 6032—3295
2. निम्न व्यवकलन पूरे कीजिए :

   (क)
   ```
    101010
   — 98765
   ———————
   ———————
   ```
   (ख)
   ```
    250608
   — 79368
   ———————
   ———————
   ```
3. निम्न में से प्रत्येक में '*' के स्थान पर उपयुक्त अंक लिखिये :

   (क)
   ```
     895
   — 29*
   —————
     **4
   —————
   ```
   (ख)
   ```
    5376
    **59
   —————
    35**
   —————
   ```
4. 5 अंकों की छोटी से छोटी संख्या और 4 अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या का अंतर ज्ञात कीजिए।
5. एक स्टोर (Store) में 2084 क्विटल आलू थे। यदि 995 क्विटल आलू बेच दिए गए हों तो स्टोर में अब कितने क्विटल आलू शेष रह गए हैं?
6. गौतम 100 रु० का नोट लेकर बाजार जाता है वह 35 रु० का राशन, 19 रु० के जूते तथा 4 रु० का दूध खरीदता है। गौतम के पास अब कितने रुपये शेष रह जाते हैं?
7. एक टेलीविजन सेट का मूल्य 3497.00 रु० था। दीवाली के उपलक्ष में उसका मूल्य घटाकर 3279.00 रु० कर दिया गया। मूल्य में कितनी कमी हुई?
8. भारत की जनसंख्या सन् 1961 में 4392 लाख थी तथा यह सन् 1971 में बढ़कर 5481 लाख हो गई। जनसंख्या में वृद्धि ज्ञात कीजिए।

2.3 गुणन पर विचार

आप जानते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं को किस प्रकार गुणा किया जाता है। यदि संख्याएं छोटी हों तो हम अपने मन ही में गुणा करके इनका गुणन फल ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, 4×5=20।

अन्यथा हम अपनी गुणन सारणियों (*multiplication table*) का प्रयोग कर सकते हैं। उदाहरणार्थ,

$$
\begin{array}{r}
60238 \\
\times 247 \\
\hline
421666 \\
240952 \\
120476 \\
\hline
14878786
\end{array}
$$

क्या संख्याओं के गुणनफल (*product*) पर इसका कुछ अंतर पड़ता है कि हम इन संख्याओं को किस क्रम में गुणा करते हैं? दूसरे शब्दों में, यदि हमें 21 और 18 का गुणनफल ज्ञात करना हो तो क्या इससे कुछ अंतर पड़ेगा कि हम 21 को 18 से गुणा करते हैं या 18 को 21 से गुणा करते हैं? नहीं! इस प्रकार, $21 \times 18 = 18 \times 21$

वास्तव में यह किन्हीं भी दो पूर्ण संख्याओं के लिए सत्य है। हम कहते हैं कि **(पूर्ण संख्याओं का) गुणन क्रम विनिमेय है।** पुनः हम विद्यार्थियों को स्मरण करा दें कि नाम का यहाँ कोई महत्व नहीं है। परन्तु विद्यार्थी को यह अवश्य ज्ञात होना चाहिए कि यह गुण क्या है और इसका किस प्रकार उपयोग किया जा सकता है।

चिन्हों और संकेतों का प्रयोग करते हुए हम **गुणन के क्रम विनिमेय गुण** (*commutativity of multiplication*) को निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं:

यदि a और b कोई दो पूर्ण संख्याएँ हों, तो

$$a \times b = b \times a$$

आइए, **गुणन के लिए एक संक्रिया सारणी** (*operation table for multiplication*) बनाएँ। पहले ही की भांति हम केवल पहली पाँच पूर्ण संख्याएँ ही लेते हैं। हमें निम्न सारणी प्राप्त होगी:

		दूसरी संख्या				
	×	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
	0	0	0	0	0	0
	1	0	1	2	3	4
पहली संख्या	**2**	0	2	4	6	8
	3	0	3	6	9	12
	4	0	4	8	12	16

मुख्य विकर्ण

हम देखते हैं कि योग सारणी की भांति ही यह संक्रिया सारणी भी मुख्य विकर्ण के सापेक्ष सममित है। सारणी से यह बहुत ही सरलता से देखा जा सकता है कि $2\times 1=1\times 2$, $3\times 2=2\times 3$, $4\times 3=3\times 4$ इत्यादि।

हम सारणी से यह भी देखते हैं कि

$$0\times 0=0$$
$$0\times 1=1\times 0=0$$
$$0\times 2=2\times 0=0$$
$$0\times 3=3\times 0=0$$
$$0\times 4=4\times 0=0$$

दूसरे शब्दों में, **शून्य और किसी पूर्ण संख्या का गुणनफल सदैव शून्य होता है।** संकेतन में हम कहते हैं कि **यदि a कोई पूर्ण संख्या हो तो**

$$0\times a=a\times 0=0$$

पुन : सारणी से हम यह भी देखते हैं कि

$$1\times 0=0\times 1=0$$
$$1\times 1=1$$
$$1\times 2=2\times 1=2$$
$$1\times 3=3\times 1=3$$
$$1\times 4=4\times 1=4$$

दूसरे शब्दों में, **1 और किसी पूर्ण संख्या का गुणनफल सदैव स्वयं वह पूर्ण संख्या होती है।** इस गुण को **1 का गुणन गुण** (*multiplication property of* 1) कहते हैं **और 1 गुणन के लिए तत्समक अवयव** (*identity element for multiplication*) कहलाता है।

चिन्हों और संकेतों का प्रयोग करते हुए हम इस गुण को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते ह :
यदि a कोई पूर्ण संख्या हो, तो

$$1\times a=a\times 1=a$$

क्या गुणन और योग में परस्पर कोई सम्बन्ध है ? आइए देखें। यदि हम 4 और 5 का गुणा करें अर्थात् 4×5 ज्ञात करें तो वह 20 आता है। यदि हम 4 को ही पांच बार जोड़ें तो क्या होगा ? हमें $4+4+4+4+4$ अर्थात् 20 प्राप्त होता है। इस प्रकार हम देखते हैं कि

$$4\times 5=4+4+4+4+4$$

या, $$7\times 8=7+7+7+7+7+7+7+7$$

दूसरे शब्दों में, (पूर्ण संख्याओं का) **गुणन केवल बार बार योग** (*repeated addition*) **ही है।**

आइए अब तीन संख्याओं माना 49, 5 और 4 को **गुणा** करें। हम इनका गुणनफल निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं।

$$(49\times 5)\times 4=245\times 4=980$$

या, $$49\times(5\times 4)=49\times 20=980$$

हम देखते हैं कि

$$(49\times 5)\times 4=49\times(5\times 4)$$

उपर्युक्त उदाहरण से गुणन का एक अन्य महत्वपूर्ण गुण स्पष्ट होता है, वह यह कि (पूर्ण संख्याओं का) **गुणन सहचारी होता है।** वस्तुत: नाम की अपेक्षा यह स्मरण रखना आवश्यक है कि

किन्हीं तीन संख्याओं का गुणनफल करने में इस बात से कोई अंतर नहीं पड़ता कि पहले हम कौन सी दो संख्याएँ लेते हैं और फिर उनके गुणनफल को अंतिम संख्या से गुणा करते हैं।

वास्तव में हम उपर्युक्त उदाहरण में देखते हैं कि यदि हम पहले 5 और 4 को गुणा करें तो सम्बन्ध गुणन अत्यन्त सरल है।

चिन्हों और संकेतों का प्रयोग करते हुये हम **गुणन के साहचर्य गुण** को निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

यदि a, b और c कोई तीन पूर्ण संख्याएँ हों, तो

$$(b\times c)\times c=a\times(b\times c)$$

इस गुण के फलस्वरूप ही हम प्रायः इन समान गुणनफलों को $a\times b\times c$ (या केवल abc लिखते हैं।

अंत में, हम **चार या उसके अधिक संख्याओं को किस प्रकार गुणा करते हैं?** हम गुणन के क्रमविनिमेय और साहचर्य गुणों का, यदि आवश्यक हो तो कई बार, प्रयोग करते है। इस स्तर पर यह आवश्यक नहीं कि हम प्रत्येक पग पर इन गुणों का प्रयोग बताते जाएँ। इस संदर्भ में जो महत्वपूर्ण है वह है 'इस प्रयोग का परिणाम'। परिणाम है कि

यदि कई संख्याएँ दी हुई हों तो यह आवश्यक नहीं कि उनको उसी क्रम में गुणा किया जाय जिसमें वो दी हुई हैं। हम उनके सरलतम समूह बनाकर उनका गुणनफल ज्ञात कर सकते हैं। यह गुण, **गुणन का पुनर्व्यवस्थितकरण गुण** (*rearrangement property of multiplication*) कहलाता है।

उदाहरणार्थ, 68, 326, 5 और 20 का गुणनफल हम निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं :

$$\begin{aligned}68\times 326\times 5\times 20 &= (68\times 20)\times(326\times 5)\\ &= 1360\times 1630\\ &= 2216800\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{या, } 68\times 326\times 5\times 20 &= (68\times 326)\times 5\times 20\\ &= (22168)\times 5\times 20\\ &= (22168\times 5)\times 20\\ &= 110840\times 20\\ &= 2216800\end{aligned}$$

स्पष्ट है कि, गुणनफल ज्ञात करने की दूसरी विधि अपेक्षाकृत कम सुविधाजनक है।

प्रश्नावली 2.3

1. निम्न गुणन पूरे कीजिए :

   (क) 745×816

   (ख) 2032×613

2. गुणा कीजिए :

(क) 49381×206

(ख) 23701×4389

3. निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए। (सबसे उपयुक्त संयोग प्रयोग कीजिए)

(क) $4 \times 203 \times 25$ (ख) $1362 \times 5 \times 18 \times 20$

4. एक पुस्तक का मूल्य 67 पैसे है। इस पुस्तक की 43 प्रतियों का क्या मूल्य होगा ?

5. 3 अंकों की छोटी से छोटी संख्या और 4 अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

6. तमिलनाडु में धान की एक किस्म की पैदावार 8 टन प्रति. हेक्टेअर हुई। 50 लाख हेक्टेअर में कुल कितनी पैदावार हुई ?

7. एक स्कूल में कक्षा IX के एक विद्यार्थी से 72 रु० वार्षिक शुल्क लिया जाता है। यदि कक्षा IX में 436 विद्यार्थी हों तो उनसे कुल कितने रुपये प्राप्त होंगे ?

8. हमारे देश में वर्ष 1974-75 में प्राथमिक कृषि ऋण सोसाइटियों की कुल संख्या 155088 थी। यदि एक सोसाइटी की औसत सदस्यता 233 हो तो कुल सदस्यता ज्ञात कीजिए।

*9. आइए (पूर्ण संख्याओं के लिए) एक ऐसी संक्रिया 'θ' खोजें जिसका अर्थ है, 'पहली संख्या में 6 जोड़कर उसको दूसरी संख्या से गुणा कर दें'। इस प्रकार, $2\theta4 = (2+6) \times 4 = 8 \times 4 = 32$, $0\theta3 = 18$, इत्यादि।

(क) $4\theta5$ का क्या अर्थ है ? $0\theta6$ का क्या अर्थ है ? $6\theta6$ का क्या अर्थ है ?

(ख) क्या $2\theta4 = 4\theta2$ है ? दूसरे शब्दों में, क्या 'θ' एक क्रमविनिमेय संक्रिया है ?

2.4 पूर्ण संख्याओं के लिए वितरण गुण

दो मित्र मोहन और सोहन किसी काम को 80 घंटे में पूरा करते हैं। मोहन को 2.00 रु० प्रति घंटा तथा सोहन को 1.00 रु० प्रति घंटा मिलता है। इस कार्य से वे कुल कितनी धन राशि कमा लेंगे?

मोहन और सोहन द्वारा कमाई गई कुल धन राशि

$= (80 \times 2)$ रु० $+ (80 \times 1)$ रु०

$= (160 + 80)$ रु०

$= 240$ रु०

क्या इस परिणाम को ज्ञात करने की कोई दूसरी विधि भी है। स्पष्ट है, मोहन और सोहन मिलकर 3.00 रु० प्रति घंटा कमाते हैं। अत:

मोहन और सोहन द्वारा कमाई गई कुल धन राशि $= 80 \times 3$ रु०

$= 240$ रु०

हम देखते हैं कि

$$(80 \times 2) + (80 \times 1) = 80 \times (2+1)$$

उपर्युक्त गुणनफलों में 80 एक **सर्वनिष्ठ गुणनखंड** (*common factor*) है। ऐसे गुणन में सर्वनिष्ठ या उभयनिष्ठ गुणनखंड स्वयं **योग पर वितरित** (*distributive over addition*) होता है। हम कहते हैं कि गुणन, योग पर वितरणात्मक है (*multiplication distributes over addition*)। चिन्हों और संकेतों का प्रयोग कर हम वितरण गुण (*distributive property*) को निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

यदि a, b, c पूर्ण संख्याएँ हों, तो
$a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$
या, $a(b+c) = ab+ac$

प्रश्नावली 2.4

वितरण गुण का प्रयोग करके निम्न को सरल कीजिए :

1. $(73 \times 64) + (27 \times 64)$
2. $(25 \times 167) + 233 \times 25$
3. 103×65
4. 45×198
5. $603 \times 7 + 3 \times 603$
6. $263 \times 24 - 163 \times 24$
7. $65 \times 813 - 613 \times 65$

निम्न में से प्रत्येक का, दो विधियों से मान ज्ञात कीजिए :

8. $(100+3) \times 305$
9. $25(264+36)$

2.5 विभाजन

आप यह जानते हैं कि एक पूर्ण संख्या को दूसरी पूर्ण संख्या से किस प्रकार विभाजित (*divide*) करते हैं। या आपको स्मरण है कि जब आपको 4 से 24 को विभाजित करना था तो आपने क्या किया था? आपने शायद स्वयं से पूछा होगा, '24' में कितने 4 सम्मिलित हैं? या, आपने स्वयं से यह प्रश्न पूछा होगा, मैं 4 को किससे गुणा करूं कि 24 आ जाए? प्रत्येक स्थिति में उत्तर 6 है। हाँ, दूसरी स्थिति में 24 को 4 से **विभाजित** करने का अर्थ वही है जो कि ऐसी संख्या ज्ञात करने का जिसे 4 से **गुणा** करने पर 24 प्राप्त हो जाए। इसी कारण विभाजन (*division*) **गुणन का प्रतिलोम** (*inverse of multiplication*) कहलाता है इस प्रकार, किसी विभाजन के प्रश्न के उत्तर की तदनुरूपी गुणन की सहायता से जाँच की जा सकती है।

अत: हम देखते हैं कि कथन $4 \times 6 = 24$ **को दूसरे प्रकार** से लिखने की विधि $24 \div 4 = 6$ है।

अब $32 \div 5$ के बारे में आप क्या सोचते हैं? हम देखते हैं कि 32 में छः '5' सम्मिलित हैं और दो शेष रह जाते हैं। या यह कि 32 प्राप्त करने के लिए 5 में 6 का गुणा करके, गुणनफल में 2 जोड़ दिया जाए। क्या आपको स्मरण है कि 32 **भाज्य** (*dividend*) है, 5 **विभाजक** (*divisor*) है, 6 **भागफल** (*quotient*) है तथा 2 **शेष** (*remainder*) है? हम इसे निम्न प्रकार लिखते हैं:

$$32 = (5 \times 6) + 2$$

अर्थात्, भाज्य = (विभाजक × भागफल) + शेष

यदि हम a को भाज्य, b को विभाजक, q को भागफल, r को शेष मानें तो चिन्हों और संकेतों का प्रयोग करने पर हमें b $(b \neq 0)$ **द्वारा a के विभाजन के लिए निम्न एल्गोरिथ्म** (*algorithm*) अर्थात् नियम (rule) प्राप्त होता है:

$$a = bq + r$$

स्पष्ट है कि a, b, q और r में से प्रत्येक एक पूर्ण संख्या है परन्तु b शून्य के बराबर नहीं होना चाहिए। **यह ध्यान रखिए कि** $r < b$।

आपको स्मरण होगा कि गुणन केवल बार बार योग ही है। अतः **विभाजन,** गुणन का प्रतिलोम होने के कारण, **केवल बार बार व्यवकलन** (*repeated subtraction*) ही रह जाता है। आइए $32 \div 5$ में इसका निरीक्षण करें।

$$\begin{array}{rl} 32 & \\ -\ 5 & \quad (1) \\ \hline 27 & \\ -\ 5 & \quad (2) \\ \hline 22 & \\ -\ 5 & \quad (3) \\ \hline 17 & \\ -\ 5 & \quad (4) \\ \hline 12 & \\ -\ 5 & \quad (5) \\ \hline 7 & \\ -\ 5 & \quad (6) \\ \hline \mathbf{2} & \end{array}$$

हम उस समय तक व्यवकलित करते रहते हैं जब तक कि हमें ऐसी संख्या (इस उदाहरण में 2) न प्राप्त हो जाए जो कि उस संख्या **विभाजक** से जिसका बार बार व्यवकलन किया जा रहा है छोटी हो। व्यवकलनों की संख्या को **भागफल** तथा अंतिम संभव व्यवकलन के बाद बची हुई संख्या को **शेष** कहा जाएगा।

शून्य से विभाजन के विषय में आप क्या सोचते हैं? आइए उदाहरण के लिए 8 को शून्य से विभाजित करने का प्रयत्न करें। हमें ऐसी दो संख्याएँ q और r ज्ञात करने की आवश्यकता है कि

$$8 = 0 \times q + r$$

परन्तु शून्य को किसी भी संख्या से गुणा करने पर शून्य ही प्राप्त होता है। अतः $8 = r$। परन्तु शेष, भाजक से, जो कि इस उदाहरण में शून्य है, छोटा होना चाहिए। अतः शून्य से विभाजन नहीं हो सकता। हम कहते हैं कि **शून्य से विभाजन परिभाषित नहीं है।**

प्रश्नावली 2.5

1. निम्न विभाजन पूरे कीजिए और तदनुरूपी गुणन की सहायता से अपने उत्तर की जांच कीजिए :

(क) $9261 \div 21$ (ख) $4107 \div 37$ (ग) $9348 \div 246$

2. विभाजित कीजिए :

(क) 72315 को 45 से

(ख) 328032 को 804 से

(ग) 364800 को 600 से

3. क्या विभाजन क्रम विनिमेय है? दूसरे शब्दों में, यदि a और b धन पूर्णांक हों तो क्या $a \div b = b \div a$ है?

4. 2431100 को दो संख्याओं के गुणा के रूप में व्यक्त कीजिए जिनमें एक संख्या 302 है।

5. एक चिड़ियाघर (zoo) में घूमते समय, 25 बच्चे हाथी की सवारी करना चाहते हैं। यदि एक हाथी पर एक बार में केवल 5 ही बच्चे बैठ सकते हैं तो हाथी को कितनी बार सवारी करानी पड़ेगी?

6. यदि प्रत्येक संख्या 4865 और 4901 को 29 से विभाजित किया जाए, तो शेष ज्ञात कीजिए।

7. एक सिनेमा गृह की प्रत्येक पंक्ति में 32 सीटें है। 475 व्यक्तियों को बैठाने के लिए कम से कम कितनी पंक्तियों की आवश्यकता है?

8. एक संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 25 से विभाजित करने पर 24 शेष रहे। क्या आप ऐसी कुछ और संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं?

9. किसी वर्ष विशेष का पहला दिन शुक्रवार था। यह मानते हुए कि यह वर्ष लौंद का वर्ष (leap year) नहीं था, ज्ञात कीजिए कि अगले वर्ष का पहला दिन सप्ताह के कौन से दिन पड़ेगा?

विविध प्रश्नावली I

(एकक I और II पर)

1. संकेतों ‘<’, ‘>’ या ‘=’ में से किसी एक का प्रयोग करते हुए रिक्त स्थानों को भरिए।
   (i) 123...321
   (ii) 55...55
   (iii) 89...1
2. (क) निम्न संख्याओं को आरोही क्रम में लिखिए :
   7, 15, 4, 1, 85
   (ख) निम्न संख्याओं को अवरोही क्रम में लिखिए :
   1, 85, 15, 4, 7
3. (क) अंकों 2, 4 और 7 का प्रयोग करते हुए एक अंक की तीन संख्याएँ लिखिए।
   (ख) अंकों 2, 4 और 7 का प्रयोग करते हुए तीन अंकों की एक संख्या लिखिए।
4. रिक्त स्थान भरिए :
   (i) $7\times(8+9)=7\times8+\ldots$
   (ii) $\ldots\times(75-15)=25\times75\ldots25\times15$
   (iii) $35\times(\ldots+\ldots)=35\times7+35\times3$
   (iv) $a(b+c)=\ldots+a\times c$
   (v) $a(b-c)=ab-\ldots$
5. संख्या 98056 में 8 और 5 के स्थानीय मानों का योग ज्ञात कीजिए।
6. संख्या 758 में 5 के स्थानीय मान को उसके अंकित मान से भाग दीजिए।
7. क्या $35\div5$, $5\div35$ के बराबर है ?
8. 175 में से 85 और 15 के योग को घटाइए।
9. 78 प्राप्त करने के लिए 203 में से क्या घटाना चाहिए ?
10. क्या संख्यापद्धति में कोई ऐसा स्थान भी है जहाँ किसी भी शून्येतर अंक के स्थानीय मान और अंकित मान एक ही हों ? यदि हाँ, तो वह स्थान ज्ञात कीजिए।
11. वह अंक बताइए जिसका स्थान बदलने पर भी स्थानीय मान नहीं बदलता।
12. 5602 में 6 के स्थानीय मान को 2 के स्थानीय मान से भाग दीजिए।

13. (क) कोई भी दो विषम संख्याएँ लीजिए और उनका अंतर ज्ञात कीजिए। यह अंतर विषम है या सम?

(ख) कोई भी दो सम संख्याएँ लीजिए और उनका अंतर ज्ञात कीजिए। यह अंतर विषम है या सम?

(ग) एक विषम और एक सम संख्या लीजिए। उनका योग विषम है या सम? उनका अंतर विषम है या सम?

14. 35 और 15 के योग और अंतर का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

15. (क) 5 पर समाप्त होने वाली 4 अंकों की छोटी से छोटी संख्या लिखिए।

(ख) 5 पर समाप्त होने वाली 4 अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या लिखिए।

16. सभी अंकों 5, 0, 2 और 7 का प्रयोग करते हुए बड़ी से बड़ी और छोटी से छोटी पूर्ण संख्याएँ बनाइए जबकि प्रत्येक अंक एक संख्या में एक ही बार आए।

17. 4 अंकों की छोटी से छोटी तथा 3 अंकों की बड़ी से बड़ी संख्याओं के योग और अंतर का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

18. सभी अंकों 0, 1, 2,..., 9 का प्रयोग करते हुए बड़ी से बड़ी और छोटी से छोटी पूर्ण संख्याएँ लिखिए जबकि प्रत्येक अंक एक संख्या में एक ही बार आए। दोनों संख्याओं का अंतर भी ज्ञात कीजिए।

19. निम्न का मान ज्ञात करने के लिए वितरण गुण का प्रयोग कीजिए:

(क) 99×15 (ख) 998×25

20. किसी वर्ष विशेष में जनवरी का पहला दिन सोमवार को पड़ता है। यह मानते हुए कि यह वर्ष लौंद का वर्ष नहीं है, बताइए कि इस वर्ष में मार्च का पहला दिन सप्ताह के कौन से दिन पड़ेगा?

21. किसी लौंद के वर्ष में फरवरी का पहला दिन शुक्रवार को पड़ता है। इस वर्ष में अप्रेल का पहला दिन सप्ताह के किस दिन पड़ेगा?

22. निम्न में से प्रत्येक में '*' के स्थान पर उपयुक्त अंक लिखिए:

(क)
```
 123
 ×*
 ---
 8*1
```

(ख)
```
  527
  ×**
 ----
  *6*9
  ***4
 -----
 1*2**
```

एकक III

पूर्णांक

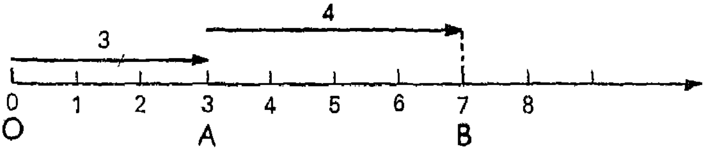
इस एकक में हम पूर्णांकों की आवश्यकता पर प्रकाश डालेंगे तथा उनको संख्या रेखा पर निरूपित करेंगे।

3.1 पूर्णांकों की आवश्यकता

अनुच्छेद 1.5 में हमने पूर्ण संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित किया था। एकक II में हमने पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाओं का पुनरावलोकन किया था। विशेष रूप से अनुच्छेद 2.2 में हमने व्यवकलन संक्रिया का अध्ययन किया था और देखा था कि यदि हम अपने को केवल पूर्ण संख्याओं तक ही सीमित रखें तो हम छोटी संख्या में से बड़ी संख्या को घटा नहीं सकते। दूसरे शब्दों में, पूर्ण संख्याओं में, हम 5−9, 98−123, इत्यादि ज्ञात नहीं कर सकते। अतः हमें नई संख्याएँ 'खोजने' की आवश्यकता है ताकि हम 5−9, 98−123, इत्यादि ज्ञात कर सकें।

आइए, पहले संख्या रेखा की सहायता से पूर्ण संख्याओं के योग और व्यवकलन ज्ञात करने की विधि का पुनरावलोकन करें।

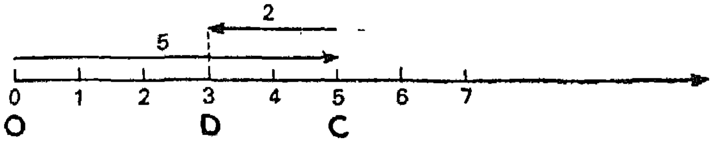
उदाहरण 1 : यदि हमें संख्या रेखा की सहायता से, उदाहरणार्थ, 3+4 ज्ञात करना हो तो हम क्या करेंगे? हमारे पास एक संख्या रेखा है जिस पर किसी बिंदु O से प्रारम्भ करके उसके दाईं ओर को चलते हुए, एक के बाद एक, बराबर पगों (दूरियों) के निशान लगे हैं। आपको याद होगा कि प्रारम्भिक बिंदु को O तथा अन्य बिंदुओं के क्रमशः 1, 2, 3,... लिखा जाता है। अब 3+4 ज्ञात करने के लिए हम O से प्रारम्भ करेंगे तथा पहले 3 पग दाईं ओर को चलेंगे और मान



आकृति 3.1 : 3+4=7

लीजिए A पर आ जाते हैं। (देखिए आकृति 3.1) फिर हम A से प्रारंभ करेंगे और दाईं ओर को 4 पग और चलेंगे और इस प्रकार, मान लीजिए, B पर आ जाते हैं। अतः 3+4=7

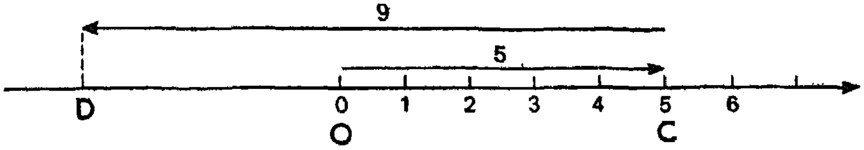
उदाहरण 2 : आइए संख्या रेखा की सहायता से, उदाहरणार्थ, 5 − 2 ज्ञात करें। हम यह कैसे करेंगे ? पुनः हम पहले O से प्रारम्भ करेंगे तथा दाईं ओर को 5 पग चलेंगे और, मान लीजिए,



आकृति 3.2 : 5 − 2 = 3

C पर आ जाते हैं। (देखिए आकृति 3.2) फिर हम C से प्रारम्भ करेंगे तथा बाईं ओर को 2 पग चलेंगे और इस प्रकार मान लीजिए D पर आ जाते हैं। अतः 5 − 2 = 3

उदाहरण 3 : आइए उदाहरण 2 की विधि का प्रयोग करें और उदाहरणार्थ, 5 − 9 ज्ञात करने का प्रयत्न करें। पहले हम O से प्रारम्भ करके दाईं ओर को 5 पग चलते है और, मान लीजिए, C पर आ जाते हैं। अब यदि हम C से प्रारम्भ करके बाईं ओर को 9 पग चलें तो हम O को पार कर जाएँगे



आकृति 3.3 : 5 − 9 = ?

और उसके बाईं ओर, मान लीजिए, किसी बिंदु D पर आ जाएँगे। (देखिए आकृति 3.3) परन्तु यह D क्या है ?

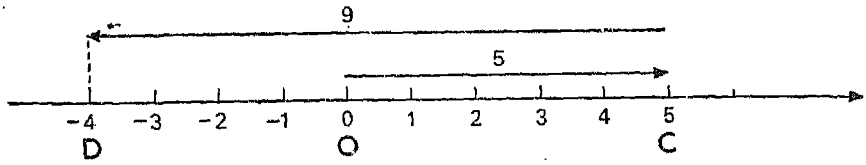
इस बिंदु को ज्ञात करने के लिए, आइए संख्या रेखा पर O से प्रारम्भ करके उसके बाईं ओर, एक के बाद एक, बराबर* पगों (दूरियों) के चिन्ह लगाएँ। साथ ही, इन बिंदुओं को क्रम से −1, −2, −3,...लिखें** (देखिए आकृति 3.4) और इन्हें क्रम से 'ऋणात्मक (*negative*) एक'*** 'ऋणात्मक दो', 'ऋणात्मक तीन', ... पढ़ें।

---

*प्रारम्भिक बिंदु के दोनों ओर दूरियाँ (पग) बराबर होनी चाहिए।

**जब (प्रारम्भिक बिंदु), O के दोनों ओर के बिंदुओं को उपर्युक्त प्रकार से लिखते हैं तो यह परम्परागत है कि O के दाईं ओर के बिंदुओं को क्रम से +1, +2, +3,...तथा बाईं ओर के बिंदुओं को क्रम से −1, −2, −3,...लिखा जाता है। इससे हमें O के दाईं ओर के पगों (steps) और बाईं ओर के पगों में भेद करने में सहायता मिलती है। इस प्रकार +3, O के बाईं ओर 3 पगों की दूरी पर एक बिंदु निरूपित करता है जबकि −3, O के बाईं ओर 3 पगों की दूरी पर एक बिंदु निरूपित करता है। परन्तु धन चिन्ह (+) को प्रायः छोड़ दिया जाता है चूँकि बिना इसके लगाए भी अर्थ सरलता से समझ में आ जाता है।

***इनको कभी कभी 'ऋण (*minus*) एक', 'ऋण दो', 'ऋण तीन', इत्यादि भी पढ़ा जाता है। परन्तु हम ऋण के स्थान पर 'ऋणात्मक' शब्द के प्रयोग को प्राथमिकता देंगे।



आकृति 3.4 : $5-9=-4$

अब हम देखते हैं कि $5-9=-4$। इस प्रकार देखिए हमने $5-9$, $98-123$, इत्यादि ज्ञात करने में समर्थ होने के लिए संख्याओं $-1, -2, -3, \ldots$ की 'खोज' की। संग्रह $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ **पूर्णांकों का समुच्चय** (*set of integers*) **कहलाता है**। जब हम इस पूरे संग्रह को लेते हैं तो $1, 2, 3, \ldots$ **धनात्मक पूर्णांक** (*positive integers*) तथा $-1, -2, -3, \ldots$ **ऋणात्मक पूर्णांक** (*negative integers*) कहलाते हैं। संख्या 0 केवल पूर्णांक है। न तो यह धनात्मक पूर्णांक है और न ही ऋणात्मक पूर्णांक।

हम देखेंगे कि जब कभी भी वास्तविक जीवन में दो परस्पर **प्रतिकूल** (*opposite*) स्थितियाँ संबद्ध होती हैं तो ऐसी स्थितियों को गणितीय रूप में व्यक्त करने के लिए पूर्णांकों के प्रयोग की आवश्यकता होती है।

उदाहरणार्थ, एक दुकानदार के विभिन्न महीनों में **लाभ** (*profits*) और **हानियाँ** (*losses*); **समुद्र सतह** (*sea level*) **से ऊपर** (*above*) **और समुद्र सतह से नीचे** (*below*) के पदों में स्थानों की **ऊंचाईयाँ**; $0°C$ **के ऊपर** या $0°C$ **के नीचे** वस्तुओं के **तापमान** (*temperatures*); इत्यादि। ऐसी स्थितियों में हम लाभ, समुद्र सतह से ऊपर ऊंचाई, $0°C$ से ऊपर तापमान, इत्यादि को **धनात्मक पूर्णांकों** से तथा उनके प्रतिकूलों (*opposites*) अर्थात् हानि, समुद्र सतह से नीचे ऊंचाई, $0°C$ से नीचे तापक्रम, इत्यादि को **ऋणात्मक पूर्णांकों** से निरूपित कर सकते हैं।

देखिए हमने ऋणात्मक पूर्णांकों को व्यक्त करने के लिए संकेत '$-$' का प्रयोग किया है। साथ ही, हम इस संकेत का व्यवकलन दर्शाने में भी प्रयोग कर चुके हैं। क्या इससे कुछ भ्रम उत्पन्न होने की संभावना है? नहीं! संदर्भ से यह सब सदैव स्पष्ट हो जाएगा। उदाहरणार्थ जब हम यह कहते हैं कि शिमले का तापमान $-3°C$ था तो यह तुरन्त स्पष्ट हो जाता है कि यहाँ कोई व्यवकलन संबद्ध नहीं है। यहाँ केवल ऋणात्मक पूर्णांक '-3' दिखाया गया है। या जब हम कहते हैं कि $16-7$ ज्ञात कीजिए तो यह तुरन्त स्पष्ट हो जाता है कि यहाँ कोई ऋणात्मक पूर्णांक संबद्ध नहीं है। यहाँ केवल 16 में से 7 का व्यवकलन दर्शाया गया है।

प्रश्नावली 3.1

1. निम्न में से प्रत्येक का **प्रतिकूल** बताइए :
   (i) मूल्य में वृद्धि
   (ii) उत्तर को जाना
   (iii) जनसंख्या में कमी
   (iv) बैंक में रुपया जमा कराना
   (v) वज़न कम होना

2. आप निम्न तापमानों को किस प्रकार लिखेंगे ?
   (i) शून्य से 7°C ऊपर (ii) शून्य से 7°C नीचे

3. निम्न को पूर्णांकों की सहायता से दर्शाइए :
   (i) खाते (*account*) में से 25 रु० निकालना,
   (ii) खाते में 110 रु० जमा करना।

4. नीचे कुछ वस्तुओं के रुपयों में विक्रय मूल्य (*selling prices*) और क्रय मूल्य (*cost prices*) दिए हुए हैं। पूर्णांकों का प्रयोग करते हुए प्रत्येक वस्तु पर हुआ लाभ या हानि लिखिए।

वस्तु	1	2	3	4	5	6	7
विक्रय मूल्य (रुपयों में)	30	18	24	16	21	7	12
क्रय मूल्य (रुपयों में)	20	12	19	23	43	10	15
लाभ (रुपयों में)	+10			−7			

5. यदि '+200' यह प्रदर्शित करता है कि कोई विशेष शहर समुद्र सतह से 200 मीटर की ऊँचाई पर है तो निम्न से क्या प्रदर्शित होगा ?
   (i) +300 (ii) −100 (iii) +70

6. संख्या रेखा पर निम्न संख्याएँ अंकित कीजिए :
   −6, 3, −8, 10, +11, −9

7. निम्न मापनों (*measures*) को पूर्णांकों की सहायता से निरूपित कीजिए :
   (i) मृत सागर (*dead sea*) की सतह, समुद्र सतह से लगभग 390 मीटर नीचे है।
   (ii) एवरेस्ट पहाड़ (*mount everest*) समुद्र सतह से लगभग 8840 मीटर ऊपर है।

3.2 निरपेक्ष मान

दो मित्र, राम और दत्त, एक ही बिंदु O से प्रारम्भ करके परस्पर विपरीत दिशाओं में 3 मीटर चलते हैं। तब राम की स्थिति को +3 (या केवल 3) से तथा दत्त की स्थिति को −3 से निरूपित किया जा सकता है। अब मान लीजिए कि उनकी चलने की दिशाओं में हमारी कोई रुचि नहीं है तथा केवल प्रत्येक ने O से जितनी दूरी चली है उसी में हमारी रुचि है। तो राम और दत्त दोनों ने ही प्रारम्भिक बिंदु O से 3 मीटर की दूरी चली है। हम कहते है कि दोनों में से प्रत्येक द्वारा मीटरों में चली हुई दूरी 'तीन' का **निरपेक्ष मान** (*absolute value*) है।

किसी पूर्णांक का निरपेक्ष मान उसके चिन्ह (*sign*) पर बिना कोई ध्यान दिए स्वयं वह पूर्णांक ही होता है। हम पूर्णांक का निरपेक्ष मान दर्शाने के लिए उसे दो उर्ध्वाधर लकीरों '| |' के बीच में रखते

हैं। इस प्रकार, $|3|=3$, $|-3|=3$, $|-8|=8$। चूँकि पूर्णांक 0 न तो धनात्मक है और न ही ऋणात्मक इसलिए हम कहते हैं कि **शून्य का निरपेक्ष मान शून्य है।** इसे हम लिखते है कि $|0|=0$

3.3 संख्या रेखा पर क्रम

हम, पूर्ण संख्याओं में, पहले ही देख चुके हैं कि एक संख्या दूसरी संख्या से बड़ी तब होती है जब कि संख्या रेखा पर पहली संख्या दूसरी संख्या के दाईं ओर स्थित हो।

हम इस कल्पना को पूर्णांकों के लिए भी लागू कर सकते हैं। -2, -5 के **दाईं** ओर स्थित है, अत: हम कहते हैं कि -2, -5 से **बड़ा** है और इसे $-2>-5$ लिखते हैं। इसी प्रकार -4, -1 के **बाईं** ओर स्थित है, अत: हम कहते हैं कि -4, -1 से **छोटा** है और इसे $-4<-1$ लिखते हैं।

यह सरलता से देखा जा सकता है कि शून्य **प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा है** तथा **प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक से छोटा है।**

संक्षेप में, **एक पूर्णांक, दूसरे पूर्णांक से बड़ा होता है जबकि वह संख्या रेखा पर दूसरे पूर्णांक के दाईं ओर स्थित हो।** साथ ही, **एक पूर्णांक, दूसरे पूर्णांक से छोटा होता है जबकि वह संख्या रेखा पर दूसरे पूर्णांक के बाईं ओर स्थित हो।**

प्रश्नावली 3.2

1. खाली स्थानों में उपयुक्त संकेत '>' या '<' भरिए ताकि निम्न में से प्रत्येक सत्य हो।
   (i) 0 ... -1 (ii) -2 ... 2
   (iii) -1 ... 18 (iv) 0 ... 7
   (v) -8 ... -3 (vi) 4 ... -1
   (vii) -8 ... -13 (viii) -6 ... -2
2. निम्न को आरोही क्रम (*increasing order*) में लिखिए :
   -3, 17, -10, 16, -4
3. निम्न को अवरोही क्रम (*decreasing order*) में लिखिए :
   -3, -10, 0, -4, -5, 21
4. निम्न में से प्रत्येक युग्म में कौनसी संख्या बड़ी है ?
   (i) 140, 120 (ii) -140, 120
   (iii) 140, -120 (iv) -140, -120
5. निम्न में कौन छोटा है ?
   (i) -2871 या -4948 (ii) -10785 या 126
   (iii) -28913 या -120610 (iv) 999 या 9999
6. -7 और 3 के बीच में कितने पूर्णांक हैं ? कितनी पूर्ण संख्याएँ हैं ?
7. निम्न में से प्रत्येक का निरपेक्ष मान लिखिए :
   -1, 0, 8, -7, $+13$

एकक IV

पूर्णांकों पर संक्रियाएँ

इस एकक में हम यह सीखेंगे कि पूर्णांकों को किस प्रकार जोड़ा, घटाया, गुणा और भाग किया जाता है। साथ ही इस एकक में हम इन संक्रियाओं के गुणों का भी अध्ययन करेंगे।

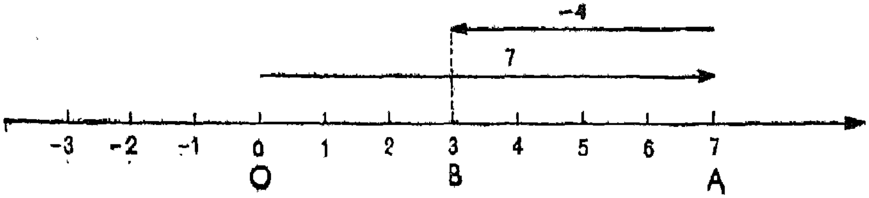
4.1 पूर्णांकों का योग

4.1.1 यदि दोनों पूर्णांक धनात्मक या शून्य हों तो हम पहले से ही जानते हैं कि इनको किस प्रकार जोड़ा जाता है। परन्तु यदि दोनों में से एक या दोनों ही ऋणात्मक हों तो क्या होगा? हम पूर्णांकों के योग के लिए ऐसा या ऐसे नियम जानना चाहेंगे जिनसे हमें अपने दैनिक जीवन के अनुभवों के अनुकूल उत्तर प्राप्त हों। उदाहरण के तौर पर हम जानते हैं कि 7 रु० के लाभ और उसके बाद 4 रु० की हानि से परिणामत: 3 रु० का शुद्ध लाभ होता है। अत: हमें यह आशा करनी चाहिए कि $7+(-4)=3$। इसी प्रकार 3 रु० के लाभ और उसके बाद 5 रु० की हानि से परिणामत: 2 रु० की शुद्ध हानि होगी। अत: हमें यह आशा करनी चाहिए कि $3+(-5)=-2$।

आइए अब संख्या रेखा को लें। आपको याद होगा कि, उदाहरणार्थ, $+3$ **दाईं** ओर को 3 पग चलना निरूपित करता है और -3, **बाईं** ओर को 3 पग चलना। इस ज्ञान के साथ आइए अब पूर्णांकों को जोड़ें।

उदाहरण 1 : $+7$ और -4 को जोड़िए।

हल : हम संख्या रेखा पर O से प्रारम्भ करेंगे तथा **पहले, दाईं** ओर को 7 पग चलेंगे। माना हम इस प्रकार A पर आ जाते हैं। अब हम A से प्रारम्भ करते हुए **बाईं ओर** को 4 पग चलेंगे और इस प्रकार मान लीजिए हम B पर आ जाते हैं। (देखिए आकृति 4.1) इस प्रकार, $7+(-4)=3$।

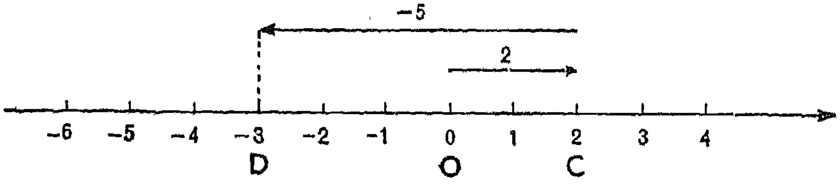


आकृति 4.1 : $7+(-4)=3$

(यदि हम पहले 4 पग बाईं ओर को चलें तथा फिर 7 पग दाईं ओर को चलें तो क्या होता है ?)

उदाहरण 2 : $+2$ और -5 को जोड़िए।

हल : संख्या रेखा पर O से प्रारम्भ करके हम पहले 2 पग दाईं ओर को चलते है और, मान लीजिए, C पर आ जाते हैं। फिर, C से प्रारम्भ करके हम 5 पग बाईं ओर को चलते हैं और, मान लीजिए, D पर आ जाते हैं। (देखिए आकृति 4.2) तब $2+(-5)=-3$



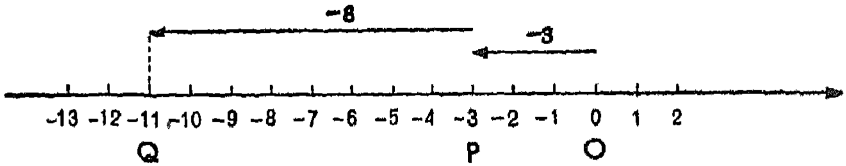
आकृति 4.2 : $2+(-5)=-3$

(यदि हम पहले 5 पग बाईं ओर को चलें तथा फिर 2 पग दाईं ओर को चलें तो क्या होता है ?)

उदाहरण 3 : -3 और -8 को जोड़िए।

हल : संख्या रेखा पर O से प्रारम्भ करके पहले हम 3 पग बाईं ओर को चलते हैं। मान लीजिए हम P पर आ जाते हैं।

अब हम P से प्रारम्भ करके बाईं ओर को 8 पग और चलते हैं तथा, मान लीजिए, Q पर आ जाते हैं। (देखिए आकृति 4.3) इस प्रकार, $(-3)+(-8)=-11$



आकृति 4.3 : $(-3)+(-8)=-11$

(यदि हम पहले 8 पग बाईं ओर को चलें तथा फिर 3 पग बाईं ओर को और चलें तो क्या होता है?)

प्रश्नावली 4.1

1. संख्या रेखा की सहायता से निम्न पूर्णांक युग्मों (*pairs of integers*) का योग ज्ञात कीजिए :

(i) $-7,\ 5$ (ii) $-3,\ -9$ (iii) $8,\ -11$
(iv) $6,\ 4$ (v) $-2,\ 2$

2. निम्न में से प्रत्येक ज्ञात कीजिए। जहां तक संभव हो संख्या रेखा का प्रयोग न कीजिए।

(i) $2+(-8)$ (ii) $-7+(-3)$

(iii) $-14+(-15)$ (iv) $-20+12$

(v) $-22+(-68)$ (vi) $49+(-12)$

3. निम्न योग सारणी पूरी कीजिए :

दूसरी संख्या

	+	−3	−2	−1	0	1	2	3
	−3							
	−2							
	−1							
पहली	0							
संख्या	1							
	2							
	3							

(क) क्या यह योग सारणी मुख्य विकर्ण के सापेक्ष सममित है?

(ख) सारणी से जाँच कीजिए कि $-3+(-1)=-1+(-3)$। क्या यह सत्य है कि $3+(-2)=(-2)+3$?

(ग) उन पूर्णांकों के युग्म लिखिए जिनका योग शून्य है।

(घ) आप पहली संख्या 0 को तदनुरूपी पंक्ति में क्या देखते हैं?

4.1.2 अनुच्छेद 4.1.1 के उदाहरणों से हम पूर्णांकों का योग ज्ञात करने के नियम निकाल सकते हैं। क्या आप बता सकते हैं कि ये नियम कौन से हैं? हम देखते हैं कि

(क) यदि पूर्णांक समान चिन्हों (*like signs*) के हैं (अर्थात् दोनों धनात्मक हैं या दोनों ही ऋणात्मक हैं तो हम उनके निरपेक्ष मानों को जोड़ते हैं और योग में उभयनिष्ठ चिन्ह लगा देते हैं।

(ख) यदि पूर्णांक असमान चिन्हों (*unlike signs*) के हों तो हम

(i) उनके निरपेक्ष ज्ञात करते हैं,

(ii) छोटे निरपेक्ष मान को बड़े मान में से घटाते हैं, तथा

(iii) इस अंतर में बड़े निरपेक्ष मानवाले पूर्णांक का चिन्ह लगा देते हैं।

उदाहरण 4 : -257 और -63 को जोड़िए।

हल : हम देखते हैं कि दोनों पूर्णांक ऋणात्मक हैं। अत: हम नियम (क) का प्रयोग करते हैं।

$$|-257| = 257$$
$$|-63| = 63$$

हम निरपेक्ष मानों अर्थात् 257 और 63 को जोड़ते हैं और हमें 257+63=320 प्राप्त होता है।

अब हम इसमें उभयनिष्ठ चिन्ह लगा देते हैं। इस प्रकार,

$$-257+(-63)=-320$$

उदाहरण 5 : −39 और 81 को जोड़िए।

हल : पूर्णांक असमान चिन्हों के हैं। इसलिए हम यहाँ नियम (ख) का प्रयोग करते हैं।

$$|-39|=39$$
$$|81|=81$$

−39 का निरपेक्ष मान छोटा है। इसलिए हम 81 में से 39 घटाते हैं। इस प्रकार हमें 42 प्राप्त होता है।

अब इस अंतर अर्थात् 42 में, हम बड़े निरपेक्ष मान वाले पूर्णांक का चिन्ह लगा देते हैं जो कि '+' है।

इस प्रकार, $-39+81=+42$

उदाहरण 6 : 494 और −795 को जोड़िए।

हल : हमें नियम (ख) के प्रयोग की आवश्यकता है। (क्यों ?)

$$|494|=494$$
$$|-795|=795$$
$$795-494=301$$

बड़े निरपेक्ष मान वाले पूर्णांक का चिन्ह '−' है। इस प्रकार, $494+(-795)=-301$

प्रश्नावली 4.2

1. निम्न पूर्णांक युग्मों को जोड़िए :

(i) −140, 110 (ii) −80, 46

(iii) −800, 820 (iv) 240, −320

(v) 908, −8 (vi) 498, −312

(vii) 6666, −7777 (viii) −5894, −789

2. निम्न में से प्रत्येक में योग ज्ञात कीजिए :

(i) $-494+(-795)$ (ii) $509+(-871)$

(iii) $-1280+(-45)$ (iv) $-623+(623)$

(v) $3003+(-999)$ (vi) $1816+(-1816)$

4.1.3 अनुच्छेदों 4.1.1 और 4.1.2 के प्रश्नों में हम, उदाहरणार्थ, यह देख सकते हैं कि

$7+(-4)=(-4)+7,$
$2+(-5)=(-5)+2,$
$-3+(-8)=(-8)+(-3),$
$-257+(-63)=-63+(-257)$, तथा
$494+(-795)=(-795)+494$

दूसरे शब्दों में, **हम पूर्णांकों को किस क्रम में जोड़ते हैं इससे योग पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।** क्या आप इस गुण का नाम बता सकते हैं? हम कहते हैं कि **पूर्णांकों का योग क्रमविनिमेय है।** अर्थात्

यदि a और b कोई दो पूर्णांक हों, तो

$$a+b=b+a$$

यदि हमें **तीन पूर्णांकों को जोड़ना** हो तो क्या होगा? आइए -80, 46 और 110 को जोड़ें। यह सरलता से जाँच की जा सकती है कि

$$(-80+46)+110=-80+(46+110)$$

क्या आप इस गुण का नाम बता सकते हैं? हम कहते हैं कि **पूर्णांकों का योग सहचारी है।** अर्थात्

यदि a b और c कोई तीन पूर्णांक हों, तो

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

पहले ही की तरह हम, प्रायः इस समान योग को $a+b+c$ लिखते हैं।

दूसरे शब्दों में, **तीन पूर्णांकों का योग ज्ञात करने में इसका कोई प्रभाव नहीं पड़ता कि हम पहले कौन से दो पूर्णांक (लेकर) जोड़ते हैं और फिर योग ज्ञात करने के लिए उसमें अंतिम पूर्णांक जोड़ते हैं।**

शून्य और किसी पूर्णांक के योग के बारे में आप क्या सोचते हैं? हम देखते हैं कि

$0+0=0$
$0+(-20)=-20=-20+0$
$0+63=63=63+0$

दूसरे शब्दों में, **किसी पूर्णांक और शून्य का योग स्वयं वह पूर्णांक होता है।** संकेतों का प्रयोग कर हम कहते हैं कि

यदि a कोई पूर्णांक हो, तो

$$a+0=a=0+a$$

यह **शून्य का योज्य गुण** कहलाता है तथा 0, (पूर्णांकों के) **योग के लिए तत्समक अवयव** कहलाता है।

अंत में, हम **चार या उससे अधिक पूर्णांकों को किस प्रकार जोड़ते हैं?** पहले ही की तरह हम योग के क्रमविनिमेय और साहचर्य गुणों का, यदि आवश्यक हो तो कई बार, प्रयोग करेंगे और **उनके सरलतम समूह बनाकर योग ज्ञात करेंगे।**

उदाहरण 7: -11, -19, 23, -32 और -18 का योग ज्ञात कीजिए।

हल : $-11+(-19)+23+(-32)+(-18)$
$=[-11+(-19)]+23+[(-32)+(-18)]$
$=(-30)+23+(-50)$
$=[-30+(-50)]+23$
$=-80+23=-57$

प्रश्नावली 4.3

1. निम्न योग ज्ञात करने के लिए संख्या रेखा का प्रयोग कीजिए :
   (i) $-6+3+(-4)$ (ii) $-11+8+(-1)$
   (iii) $-3+(-4)+(-5)$
2. योग ज्ञात कीजिए। [सबसे उपयुक्त संयोग (*association*) का प्रयोग कीजिए।]
   (i) 373, −245, −373 (ii) −391, −81, −9
   (iii) −982, 1934, −18, −2034 (iv) −4329, 8648, −4371

3. आइए (पूर्णांकों के लिए) एक संक्रिया '' ऐसी खोजें कि यदि a और b दो पूर्णांक हों तो

$$a*b=a+b+1$$

उदाहरणार्थ, $2*3=2+3+1=6,$
$4*(-3)=4+(-3)+1=2$

(क) $-2*(-2)$ का क्या अर्थ है? $0*7$ का क्या अर्थ है? $0*(-5)$ का क्या अर्थ है?

(ख) क्या $2*3=3*2$ है? क्या * एक क्रमविनिमेय संक्रिया है?

4.2 पूर्णांक का ऋणात्मक

धनात्मक और ऋणात्मक पूर्णांकों से सामान्य युग्मों उदाहरणार्थ 1 और −1, 2 और −2, 3 और −3, इत्यादि का संकेत मिलता है। हम देखते हैं कि प्रत्येक युग्म में योग शून्य है, अर्थात् $1+(-1)=0$, $2+(-2)=0$, इत्यादि। ऐसे किसी भी युग्म में प्रत्येक पूर्णांक दूसरे पूर्णांक का ऋणात्मक [(या योज्य प्रतिलोम (*additive inverse*)] कहलाता है। अतः 3 का ऋणात्मक −3 है तथा −3 का ऋणात्मक 3 है। इस प्रकार, **प्रत्येक शून्येतर पूर्णांक 'a' के लिए एक पूर्णांक −'a' इस प्रकार होता है कि $a+(-a)=0$। '$-a$', a का ऋणात्मक (या योज्य प्रतिलोम) कहलाता है। शून्य का ऋणात्मक स्वयं शून्य ही है?**

प्रश्नावली 4.4

1. निम्न में से पूर्णांकों और उनके ऋणात्मकों के युग्म चुनिए :
   $-17, 8, -6, -4, -3, 3, 6, 17, 4, -8$
2. निम्न में से प्रत्येक का ऋणात्मक लिखिए :
   $-200, -100, -65, -48, 84, 95, 0, -1$
3. संख्या रेखा पर निम्न में से प्रत्येक को '.' से तथा उसके ऋणात्मक को '×' से दर्शाइए :
   $3, -7, -2, 4, 8$
4. रिक्त स्थान भरिए :

(i) $-4+\ldots=0$	(ii) $8+\ldots=0$
(iii) $3+(-3)=\ldots$	(iv) $\ldots+(-5)=0$
(v) $-7+\ldots=0$	(vi) $-2+2=\ldots$

4.3 पूर्णांकों का व्यवकलन

आपको याद होगा कि व्यवकलन, योग का प्रतिलोम होता है। उदाहरणार्थ 9 में से 5 घटाने का अर्थ वही है जो ऐसी संख्या ज्ञात करने का जिसे 5 में जोड़ने से 9 प्राप्त हो जाए।

उदाहरण के तौर पर 10 में से -8 घटाने के लिए हम इसी प्रकार का प्रश्न पूछते हैं कि '-8 में हम क्या जोड़ें कि 10 प्राप्त हो जाए?' स्पष्टतया इसका उत्तर 18 है।

(यदि आप संख्या रेखा पर मान लीजिए किसी बिंदु A पर हैं जो कि प्रारम्भिक बिंदु O से 8 पग बाईं ओर को है तो आपको एक ऐसे बिंदु तक आने में, जो कि O से 10 पग दाईं ओर को है, A से उसके दाईं ओर कितने पग चलने पड़ेंगे?)

अब आइए -8 का ऋणात्मक ज्ञात करें और उसे 10 में जोड़ें। हमें क्या प्राप्त होता है? -8 का ऋणात्मक 8 है जिसे 10 में जोड़ने पर हमें 18 प्राप्त होता है। इस प्रकार,

$$10-(-8)=10+8=18$$

दूसरे शब्दों में, 10 में से -8 घटाने के लिए हम 10 में -8 का ऋणात्मक (या योज्य प्रतिलोम) जोड़ते हैं। वास्तव में **यह पूर्णांकों के व्यवकलन का नियम ही है।**

यदि a और b कोई दो पूर्णांक हों तो a में से b को घटाने का अर्थ वही है जो a में b का ऋणात्मक (या योज्य प्रतिलोम) जोड़ने का। अर्थात्

$$a-b=a+(-b)$$

एक बार जब हमें b का ऋणात्मक ज्ञात हो जाए, तो हम वांछित परिणाम प्राप्त करने के लिए **पूर्णांकों के योग के नियम (क) या (ख) का प्रयोग कर सकते हैं।**

प्रश्नावली 4.5

1. घटाइए :
   (i) 8 में से -3 (ii) 7 में से -9
   (iii) -6 में से -5 (iv) -7 में से 2
2. घटाइए :
   (i) 3126 में से -812 (ii) -6 में से 8650
   (iii) -4109 में से -3987 (iv) 0 में से -236
   (v) 0 में से 236 (vi) 732 में से 0
   (vii) -732 में से 0 (viii) 40321 में से 83241
3. रिक्त स्थानों में उपयुक्त संकेत '<' या '>' भरिए :
   (i) $(-5)+(-8)\ldots(-5)-(-8)$
   (ii) $(-15)-(-15)\ldots(-15)+(-15)$
   (iii) $(-20)-(+20)\ldots(+20)-(+65)$
4. -27 में से 23 घटाइए। 23 में से -27 घटाइए।
   क्या $23-(-27)=-27-23$ है ?
5. एक दिन दोपहर 12 बजे दिल्ली में तापमान 40°C था। उसी दिन सायं 4 बजे तक यह तापमान गिरकर 32°C रह गया। तापमान में गिरावट ज्ञात कीजिए।
6. दो स्थान A और B क्रमशः समुद्र सतह से 10 मीटर और 22 मीटर ऊपर हैं। A से B की कितनी ऊंचाई है ?
7. रिक्त स्थान भरिए :
   (i) किसी पूर्णांक में से 7 घटाने के लिए, हम उस पूर्णांक में...जोड़ते हैं।
   (ii) किसी पूर्णांक में से -11 घटाने के लिए, हम उस पूर्णांक में...जोड़ते हैं।
   (iii) $-4+\ldots=12$
   (iv) $-8+\ldots=0$
   (v) $\ldots-215=-64$
8. दो पूर्णांकों का योग -396 है। यदि इनमें से एक 641 हो तो दूसरा ज्ञात कीजिए।
9. एक कक्षा के टैस्ट (*class-test*) में उत्तीर्ण होने के लिए न्यूनतम जितने अंकों की आवश्यकता है उससे शशि ने 25 अंक अधिक प्राप्त किए तथा उसकी बहिन रीता ने 3 अंक कम प्राप्त किए। शशि ने रीता से कितने अंक अधिक प्राप्त किए ?

*10. ज्ञात कीजिए :
   $1-2+3-4+5-6+\ldots+49-50.$

*11. योग $1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\ldots$ पर विचार कीजिए। यह योग कितना होगा जबकि इसमें
   (i) 731 'एक' हों (ii) 262 'एक' हों।

4.4 पूर्णांकों का गुणन

4.4.1 हम पहले से ही जानते हैं कि यदि दोनों पूर्णांक धनात्मक या शून्य हों तो उनको किस प्रकार गुणा किया जाता है। आपको याद होगा कि गुणन केवल बार बार योग ही है। उदाहरण के तौर पर, $4\times 5=4+4+4+4+4$ अर्थात् 20 है।

यदि हम, मान लीजिए, -5 और 4 को गुणा करना चाहें तो हम क्या करेंगे? आइए एक वास्तविक जीवन से संबंधित स्थिति पर विचार करें तथा देखें कि -5 और 4 का योग ज्ञात करने में क्या व्यावहारिक ज्ञान (*common sense*) हमारी कुछ सहायता कर सकता है?

उदाहरण 1 : एक घड़ी प्रतिदिन (अर्थात् प्रत्येक 24 घंटे की अवधि में) 5 मिनट सुस्त हो जाती है। वह 4 दिन में कितनी सुस्त हो जाएगी?

हल : स्पष्ट है कि घड़ी 4 दिन में 20 मिनट सुस्त हो जाएगी।

दूसरे शब्दों में,

$$(-5)\times 4=-20=(-5)+(-5)+(-5)+(-5)$$

अब आइए एक ऐसी स्थिति का अध्ययन करें जिससे हमें, उदाहरणार्थ, 4 और -5 का गुणा करने में सहायता मिलेगी।

उदाहरण 2 : एक व्यक्ति जो कि पश्चिम से पूर्व की ओर 4 किलोमीटर प्रति घंटे की चाल से जा रहा है किसी बिंदु O तक आ जाता है और उसके आगे भी उसी चाल से और उसी दिशा में चलना जारी रखता है। O पर पहुंचने के 2 घंटे बाद वह कहाँ होगा? O पर पहुंचने से 5 घंटे पहले वह कहाँ था?

हल : स्पष्ट है, O पर पहुंचने के 2 घंटे **बाद** वह व्यक्ति O से 8 किलोमीटर **पूर्व** में होगा और O पर पहुंचने से 5 घंटे **पहले**, वह O से 20 किलोमीटर **पश्चिम** में था। यदि हम उसकी स्थितियों को एक संख्या रेखा पर निरूपित करें तो हम देखते हैं कि O पर पहुंचने के 2 घंटे बाद वह, बिंदु $+8$ पर होगा तथा O पर पहुंचने से 5 घंटे पहले वह, बिंदु -20 पर था।

इस प्रकार $4\times(+2)=8$ तथा $4\times(-5)=-20$

अंत में, हम दो ऋणात्मक पूर्णांकों, उदाहरणार्थ, -2 और -5 को किस प्रकार गुणा करते हैं? हम यहाँ ऋणात्मक पूर्णांकों को गुणा करने के नियम के बारे में कुछ संकेत प्राप्त करने के लिए प्रतिरूप विधि (*pattern approach*) का प्रयोग करेंगे?

आइए निम्न को देखें :

$$\begin{aligned}
(-5)\times 6 &= -30\\
(-5)\times 5 &= -25\\
(-5)\times 4 &= -20\\
(-5)\times 3 &= -15\\
(-5)\times 2 &= -10\\
(-5)\times 1 &= -5\\
(-5)\times 0 &= 0\\
(-5)\times(-1) &= ?
\end{aligned}$$

इस '**ऋण पाँच गुनी**' सारणी में हम देखते हैं कि जब दूसरा पूर्णांक 1 घटता है तो गुणनफल 5 बढ़ जाता है। अत: $(-5) \times (-1)$ ज्ञात करने के लिए हमें इससे पहले गुणनफल को 5 बढ़ा देना चाहिए। इससे हमें $(-5) \times (-1) = +5$ प्राप्त होता है। इसी प्रकार $(-5) \times (-2)$ ज्ञात करने के लिए हमें इससे पहले गुणनफल को 5 बढ़ा देना चाहिए। इससे हमें $(-5) \times (-2) = 10$ प्राप्त होता है। आइए ऐसे कुछ और गुणनफल लिखें।

$(-5) \times (-3) = 15,$

$(-5) \times (-4) = 20,$

$(-5) \times (-5) = 25,$ इत्यादि

अत: दो **पूर्णांकों के गुणन के लिए** हमें निम्न नियम प्राप्त होते हैं :

(क) यदि पूर्णांक समान चिन्हों के हों तो उनका गुणनफल धनात्मक होता है।

(ख) यदि दोनों पूर्णांक असमान चिन्हों के हों तो उनका गुणनफल ऋणात्मक होता है,
प्रत्येक स्थिति में, गुणनफल का निरपेक्ष मान, दोनों पूर्णांकों के निरपेक्ष मानों के गुणनफल के बराबर होता है।

उदाहरण 3 : -14 और 12 को गुणा कीजिए।

हल : $|-14| = 14$, $|12| = 12$, निरपेक्ष मानों का गुणनफल $14 \times 12 = 168$ है। अब दोनों पूर्णांक असमान चिन्हों के हैं, अत: नियम (ख) के अनुसार इनके गुणनफल का चिन्ह ऋणात्मक होगा।

इस प्रकार, $(-14) \times 12 = -168$

उदाहरण 4 : -25 और -3 को गुणा कीजिए।

हल : $|-25| = 25$, $|-3| = 3$

निरपेक्ष मानों का गुणनफल 25×3 अर्थात 75 है। साथ ही, चूंकि दिए हुए पूर्णांक समान चिन्हों के हैं अत: इनके गुणनफल का चिन्ह धनात्मक होगा।

इसप्रकार, $(-25) \times (-3) = 75$

प्रश्नावली 4.6

1. गुणा कीजिए :

(i) -5 और 6 (ii) 11 और -13

(iii) -18 और 7 (iv) -12 और -6

(v) 0 और -5 (vi) -11 और 0

2. निम्न गुणन सारणी पूरी कीजिए :

दूसरी संख्या

	×	−3	−2	−1	0	1	2	3
	−3							
	−2							
	−1							
पहली संख्या	0							
	1							
	2							
	3							

(क) क्या गुणन सारणी मुख्य विकर्ण के सापेक्ष सममित है ?

(ख) निम्न में से प्रत्येक के पक्ष में दो दो उदाहरण दीजिए :

(i) दो धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक होता है;

(ii) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक होता है;

(iii) एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल ऋणात्मक होता है ?

(ग) सारणी से जाँच कीजिए कि $(-3)\times 2 = 2\times(-3)$ । क्या यह सत्य है कि $(-3)\times(-2) = (-2)\times(-3)$?

(घ) उन पूर्णांक युग्मों की सूची बनाइए जिनके गुणनफल शून्य है ।

3. निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $651\times(-3)$

(ii) $(-399)\times 9$

(iii) $(-465)\times(-25)$

(iv) $(-23067)\times 0$

4. (i) 16 और −1 का गुणा कीजिए। क्या आपको याद है कि 16 का ऋणात्मक क्या है ?

(ii) −27 और −1 का गुणा कीजिए। क्या आपको याद है कि −27 का ऋणात्मक क्या है ?

(हम देखेंगे कि किसी पूर्णांक का ऋणात्मक प्राप्त करने का अर्थ वही है जो उस पूर्णांक को '−1' से गुणा करने का।)

4.4.2 क्या इसका कुछ प्रभाव पड़ता है कि हम दो पूर्णांकों को किस क्रम में लेकर उनका गुणनफल ज्ञात करते हैं ? उदाहरण 1 में यह सरलता से जाँच की जा सकती है कि $(-5)\times 4 = 4\times(-5)$। इसी प्रकार उदाहरण 4 में यह सरलता से जाँच की जा सकती है कि

$$(-25)\times(-3) = (-3)\times(-25)$$

वास्तव में, यह किन्हीं भी दो पूर्णांकों के लिए सत्य है। हम कहते हैं कि **पूर्णांकों का गुणन क्रमविनिमेय है।** दूसरे शब्दों में, **दो पूर्णांकों के गुणा करने में इसका कोई प्रभाव नहीं पड़ता कि हम पूर्णांकों को किस क्रम में लेकर गुणा करते हैं।**

संकेतों का प्रयोग करने पर हम लिखते हैं कि

यदि a और b कोई दो पूर्णांक हों, तो

$$a \times b = b \times a$$

अब किसी पूर्णांक और शून्य के गुणनफल के बारे में आप क्या सोचते हैं? प्रश्नावली 4.6 के प्रश्न 1 के (v) और (vi) भागों में हम देखते हैं कि

$$0 \times (-5) = 0$$
$$(-11) \times 0 = 0$$

हम यह पहले से ही जानते हैं कि शून्य और किसी भी पूर्ण संख्या का गुणनफल सदैव शून्य होता है। इस परिणाम और उपर्युक्त दो उदाहरणों से हम देखते हैं कि **शून्य और किसी भी पूर्णांक का गुणनफल सदैव शून्य होता है।** संकेतों का प्रयोग करने पर हम कहते हैं कि

यदि a कोई पूर्णांक हो, तो

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

आइए अब दो पूर्णांकों के गुणनफल का निरीक्षण करें जबकि इनमें से एक पूर्णांक 1 है। हम यह पहले से ही जानते हैं कि 1 और किसी पूर्ण संख्या का गुणनफल स्वयं वह पूर्ण संख्या होती है। हम यह भी देखते हैं कि

$$1 \times (-1) = -1 = (-1) \times 1$$
$$1 \times (-2) = -2 = (-2) \times 1$$
$$1 \times (-3) = -3 = (-3) \times 1$$
$$1 \times (-4) = -4 = (-4) \times 1$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि **1 और किसी पूर्णांक का गुणनफल सदैव स्वयं वह पूर्णांक होता है। यह 1 का गुणन गुण** (*multiplication property of* 1) कहलाता है तथा **पूर्णांकों के गुणन के लिए 1 तत्समक अवयव कहलाता है।** संकेतों का प्रयोग करने पर हम लिखते हैं कि

यदि a कोई पूर्णांक हो, तो

$$1 \times a = a \times 1 = a$$

आइए अब **तीन पूर्णांकों, उदाहरणार्थ, −45, −8 और 25 का आपस में गुणा करें।**

$$[(-45) \times (-8)] \times 25 = 360 \times 25$$
$$= 9000$$
$$(-45) \times [(-8) \times 25] = (-45) \times (-200)$$
$$= 9000$$

हम देखते हैं कि

$$[(-45) \times (-8)] \times 25 = (-45) \times [(-8) \times 25]$$

दूसरे शब्दों में, हम **किन्हीं भी दो पूर्णांकों** का संयोग करके उनके गुणनफल का तीसरे पूर्णांक से

गुणा कर सकते हैं। वास्तव में, हम देखते हैं कि उपर्युक्त उदाहरण में संयोग $[(-45)\times(-8)]$ की तुलना में संयोग $[(-8)\times 25]$ से सरलतम समूह प्राप्त होता है।

उपर्युक्त उदाहरण गुणन के एक अन्य महत्वपूर्ण गुण की व्याख्या करता है। वह यह कि **पूर्णांकों का गुणन सहचारी है।** अर्थात्

तीन पूर्णांकों का गुणनफल ज्ञात करने में इसका कोई प्रभाव नहीं पड़ता कि पहले हम कौनसे दो पूर्णांक (लेकर) गुणा करते हैं और फिर इस गुणनफल को अंतिम पूर्णांक से गुणा करते हैं।

संकेतों का प्रयोग करने पर, हम लिखते हैं कि **यदि** a, b **और** c **कोई तीन पूर्णांक हों तो,**

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$$

इस गुण के फलस्वरूप ही, **हम प्रायः इन समान गुणनफलों को** $a\times b\times c$ **(या केवल** abc**) लिखते हैं।** अंत में, हम **चार या अधिक पूर्णांकों का** किस प्रकार **गुणा** करते हैं। हम क्रमविनिमेय और साहचर्य गुणों का, **यदि आवश्यक** हो तो कई बार, प्रयोग करते हैं और **पूर्णांकों के सरलतम समूह बनाकर उनका गुणनफल ज्ञात करते हैं।**

उदाहरण 5 : -48, -4, 25 और -23 को गुणा कीजिए।

हल : $(-48)\times(-4)\times(25)\times(-23)$

$=[(-48)\times(-4)]\times[(25)\times(-23)]$

$=192\times(-575)=-110400$

या, हम इनके निम्न सरलतम समूह बना सकते हैं और इनका गुणनफल ज्ञात कर सकते हैं :

$(-48)\times(-4)\times(25)\times(-23)$

$=[(-48)\times(-23)]\times[(-4)\times 25]$

$=1104\times(-100)=-110400$

4.4.3 पूर्णांकों के लिए वितरण गुण

आइए, उदाहरणार्थ, $2\times[3+(-1)]$ को दो विभिन्न विधियों से ज्ञात करें :

$2\times[3+(-1)]=2\times 2=4$

साथ ही, $2\times 3+2\times(-1)=6+(-2)=4$

इस प्रकार, $2\times[3+(-1)]=2\times 3+2\times(-1)$

इसी प्रकार, उदाहरणार्थ, हम यह भी जाँच कर सकते हैं कि

$6\times[(-8)+4]=6\times(-8)+6\times 4$

या, $(-2)\times[7+(-5)]=(-2)\times(7)+(-2)\times(-5)$

या, $(-8)\times[(-6)+(-4)]=(-8)\times(-6)+(-8)\times(-4)$

वास्तव में, **यदि तीन पूर्णांक** a, b **और** c, **दिए हुए हों तो यह सरलता से जाँच की जा सकती है कि**

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$$

या, $$a(b+c)=ab+ac$$

हम कहते हैं कि **पूर्णांकों का गुणन, योग के ऊपर वितरणात्मक है।**

प्रश्नावली 4.7

1. निम्न ज्ञात कीजिए : (सबसे उपयुक्त संयोग का प्रयोग कीजिए)
   (i) $(-2)\times 36\times(-5)$
   (ii) $(-8)\times(-43)\times 0$
   (iii) $(18)\times(-183)\times(-4)$
   (iv) $(-45)\times(55)\times(-10)$
2. निम्न के मान ज्ञात कीजिए :
   (i) $-125\times(-8)\times 35\times(-42)$
   (ii) $-2\times(-3)\times(-4)\times(-5)\times(-6)$
   (iii) $(-48)\times(-8)\times 6\times 10$
   (iv) $(-8)\times 0\times 37\times(-37)$
3. यदि हम निम्न का गुणा करें तो गुणनफल का क्या चिन्ह होगा ?
   (i) 1 ऋणात्मक और 3 धनात्मक पूर्णांक
   (ii) 2 ऋणात्मक और 5 धनात्मक पूर्णांक
   (iii) 8 ऋणात्मक और 1 धनात्मक पूर्णांक
   (iv) 21 ऋणात्मक और 1 धनात्मक पूर्णांक
4. पूर्णांकों -40, 16, -54, -68 और 0 में से प्रत्येक को दो पूर्णांकों के गुणा के रूप में लिखिए जब कि इनमें से एक पूर्णांक -1 हो।
5. सरल कीजिए : $(-8)\times[10-5-43+98]$
6. निम्न की तुलना कीजिए :
   (i) $(11+9)\times 10$ और $11+(9\times 10)$
   (ii) $(41-3)\times 10$ और $41-(3\times 10)$

4.5 पूर्णांकों का विभाजन

अब जबकि हमारे पास पूर्णांकों को गुणा करने के नियम हैं, उनके विभाजन के नियम ज्ञात करना सरल है। निस्संदेह, हम इस बात पर बल देंगे, जैसा कि हमने पूर्ण संख्याओं के लिए कहा था, कि **शून्य से विभाजन नहीं किया जा सकता।**

आपको याद होगा कि विभाजन, गुणन का प्रतिलोम है। उदाहरणार्थ, 18 को -6 से भाग देने के लिए हमें यह पूछना चाहिए, "हम 18 प्राप्त करने के लिए -6 को किससे गुणा करें ?" स्पष्ट है, इसका उत्तर -3 है। इस प्रकार,

$$18\div(-6)=-3$$

या, उदाहरणार्थ, -64 को 8 से भाग देने के लिए हमें पूछना चाहिए, "-64 प्राप्त करने के लिए हम 8 को किससे गुणा करें ?" स्पष्ट है, इसका उत्तर, -8 है। इस प्रकार,

$$(-64)\div 8=-8$$

इसीप्रकार, उदाहरणार्थ, -32 को -4 से भाग देने के लिए हमें यह पूछना चाहिए "-32 प्राप्त करने के लिए हम -4 को किससे गुणा करें?" स्पष्ट है, इसका उत्तर 8 है। इस प्रकार,

$$(-32) \div (-4) = 8$$

इस प्रकार हमें दो पूर्णांकों के विभाजन के लिए निम्न नियम प्राप्त होते हैं :

(क) यदि पूर्णांक समान चिन्हों के हैं तो उनका भागफल धनात्मक होगा;

(ख) यदि पूर्णांक असमान चिन्हों के हैं तो उनका भागफल ऋणात्मक होगा; प्रत्येक स्थिति में भागफल का निरपेक्षमान भाज्य के निरपेक्ष मान को भाजक के निरपेक्ष मान से भाग करने से प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण 1 : 68 को -17 से भाग दीजिए।

हल : $|68| = 68$, $|-17| = 17$

भाज्य के निरपेक्ष मान को भाजक के निरपेक्ष मान से भाग करने पर, हमें $68 \div 17$ अर्थात् 4 प्राप्त होता है।

अब पूर्णांक असमान चिन्हों के हैं, अतः नियम (ख) के अनुसार भागफल का चिन्ह ऋणात्मक होगा। इस प्रकार,

$$68 \div (-17) = -4$$

उदाहरण 2 : -78 को 13 से भाग दीजिए।

हल : $|-78| = 78$, $|13| = 13$ तथा $78 \div 13 = 6$

यहाँ पूर्णांक पुनः असमान चिन्हों के हैं अतः भागफल का चिन्ह ऋणात्मक होगा। इस प्रकार,

$$(-78) \div 13 = -6$$

उदाहरण 3 : -324 को -9 से भाग दीजिए।

हल : $|-324| = 324$, $|-9| = 9$ तथा $324 \div 9 = 36$

दोनों पूर्णांक समान चिन्हों के हैं, अतः नियम (क) से, भागफल का चिन्ह धनात्मक होगा। इस प्रकार,

$$(-324) \div (-9) = 36$$

प्रश्नावली 4.8

1. निम्न में से प्रत्येक में भागफल ज्ञात कीजिए :

(i) $36 \div (-9)$ (ii) $-48 \div (-16)$

(iii) $-24 \div 8$ (iv) $-56 \div (-4)$

(v) $0 \div (-7)$

2. रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) $\ldots \div (-11) = -3$ (ii) $\ldots \div 7 = -1$

(iii) $\ldots \div 60 = 2$ (iv) $\ldots \div (-3) = -4$

(v) $\ldots \div (-5) = 2$

3. भाग दीजिए :

(i) 10 को 10 से (ii) 10 को -10 से

(iii) -10 को 10 से (iv) -10 को -10 से

विविध प्रश्नावली II

(एकक III और IV पर)

1. निम्न को संकेतों '<' या '>', का प्रयोग करते हुए दुबारा लिखिए :
   (i) -7, -17 से बड़ा है।
   (ii) 10 धनात्मक है।
   (iii) -3 ऋणात्मक है।
   (iv) -3, 3 से छोटा है।
2. दो पूर्णांकों का गुणनफल -1 है। पूर्णांक ज्ञात कीजिए।
3. निम्न को दो पूर्णांकों के गुणा के रूप में लिखिए जिनमें से एक पूणाक -1 हो :
   (i) 5 (ii) -13 (iii) 9 (iv) -1 (v) 1 (vi) 0
4. $|-3|$ और $-|3|$ के अर्थ बताइए।
5. सरल कीजिए :
   (i) $-|4|+|-4|-|-4|$
   (ii) $|(-4)\times(-2)|+|-4|-|-2|$
6. यदि तापमान $-4°C$ हो और फिर वह $20°C$ बढ़ जाए तो नया तापमान ज्ञात कीजिए।
7. $0\div 3$, $0\div(-3)$, $0\div 162$ और $0\div(-162)$ ज्ञात कीजिए।
   [संकेत : $0\times 3=0$, इत्यादि]
   हम देखेंगे कि शून्य को किसी शून्येतर पूर्णांक से भाग देने पर सदैव शून्य प्राप्त होता है।
8. निम्न को पूरा कीजिए :
   (i) -15 घटाने का अर्थ है, ... जोड़ना।
   (ii) 16 घटाने का अर्थ है, ... जोड़ना।
9. रिक्त स्थान भरिए :
   (i) $(-8)+(-5)=(-8)-(\ldots)$
   (ii) $7+5=7-(\ldots)$
   (iii) $(-9)-(+6)=(-9)+(\ldots)$
10. सरल कीजिए :
   (i) $18-(-3)(12)\div 6$
   (ii) $-20+(-60)(5)\div(-10)$
   (iii) $36\div(-3)+12$
11. निम्न में से प्रत्येक में एकक अंक (*unit's digit*) ज्ञात कीजिए :
   (i) $17\times(-27)\times 37\times 22$
   (ii) $12\times 25\times(-16)\times(-13)$
   (iii) $16\times(-26)\times(-36)\times(-46)$

12. 50 प्रश्नों के एक सत्य-असत्य टैस्ट में, प्रत्येक सही उत्तर के लिए विद्यार्थी को 2 अंक मिलते हैं तथा प्रत्येक गलत उत्तर के लिए -1 मिलता है। कोई उत्तर न देने पर उसे 0 मिलता है।

(क) एक विद्यार्थी 32 सही और 14 गलत उत्तर देता है तथा 4 प्रश्न नहीं करता है। वह कितने अंक प्राप्त करेगा ?

(ख) उस विद्यार्थी को कितने अंक मिलेंगे जो कि 25 प्रश्न सही करता है और 25 गलत करता है ?

13. ज्ञात कीजिए :

(i) $(-3)\times[5+(-8)+9]-[4\times\{9+8+(-7)\}]$

(ii) $[(-6)\times(9-12)]+[(-8+15)\times(-15)]$

(iii) $(-7)\times[(-5)+8(43-57)]$

(iv) $[(-15)\times(48-43+18-10-11)]+[(37-45)\times(-15)]$

14. आइए (पूर्णांकों के लिए) एक ऐसी संक्रिया '' खोजें जिसका अर्थ है दोनों पूर्णांकों को जोड़कर उनके योग में उनका गुणनफल जोड़ दे। दूसरे शब्दों में, यदि a और b कोई दो पूर्णांक हों तो

$$a*b=a+b+ab$$

इस प्रकार, $2*3=2+3+6=11$, $2*(-3)=2+(-3)+(-6)=-7$, $0*4=4$, इत्यादि।

(क) $4*5$, $0*3$, $(-3)*0$ और $(-2)*(-1)$ के क्या अर्थ हैं ?

(ख) क्या $2*3=3*2$ है ?

*15. एक मेंढक, जो 8 मीटर गहरे एक कुएं में गिर गया है छलांग लगाकर उससे बाहर निकलने का प्रयत्न करता है। प्रत्येक बार, मेंढक ऊपर को 70 सेमी की छलांग लगाता है और 20 सेमी पीछे को फिसल जाता है। प्रत्येक छलांग का वास्तव में क्या परिणाम रहता है ? कुएं से बाहर निकलने के लिए मेंढक को कितनी छलांगें लगानी पड़ेंगी ?

एकक V

पूर्णांकों की घातें

हम, इस एकक में, पूर्णांकों के वर्ग, घन और बड़ी पूर्णांकीय घातों (*integral powers*) का अध्ययन करेंगे। हम यह भी सीखेंगे कि उन धनात्मक पूर्णांकों का जो कि पूर्ण वर्ग (*perfect squares*) हैं, वर्गमूल किस प्रकार निकाला जाता है।

5.1 पूर्णांकों की घातें

जब किसी पूर्णांक को उसी से गुणा किया जाता है तो हम कहते हैं कि हमें पूर्णांक का **द्वितीय घात** (*second power*) या **वर्ग** (*square*) प्राप्त हो गया है। उदाहरणार्थ, 3×3, 3 का वर्ग है और इसे 3^2 लिखा जाता है। हम 3^2 को '**3 की द्वितीय घात**' या '**3 का वर्ग**' या '**3 पर घातांक** (*exponent*) 2' (या केवल '**3-घात 2**') या **3-वर्ग** पढ़ते हैं। निस्संदेह, $3^2 = 9$

इसी प्रकार, $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$,

तथा, $10^2 = 10 \times 10 = 100$

ऊपर लिखा हुआ संख्यांक, **घातांक** (*exponent* या *index*) कहलाता है तथा 3×3 को 3^2 के रूप में लिखने को **घातांक संकेतन** (*exponential notation*) या **घात संकेतन** (*power notation*) में लिखना कहते हैं।

जब किसी गुणनफल में कोई पूर्णांक तीन बार आता है तो हम कहते हैं कि हमें पूर्णांक की **तृतीय घात** (*third power*) या **घन** (*cube*) प्राप्त हो गया है। उदाहरणार्थ $2 \times 2 \times 2$, 2 का घन है और इसे 2^3 लिखा जाता है। हम 2^3 को '**2 की तृतीय घात**' या '**2 का घन**' या '**2 पर घातांक 3**' या '**2-घन**' पढ़ते हैं। इस प्रकार, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$,

इसी प्रकार, $(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6) = -216$,

$7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$

तथा $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

पूर्णांकों की बड़ी घातों के विषय में भी उपर्युक्त प्रकार से विचार किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, 2 **की चतुर्थ घात** (*fourth power*) अर्थात् **2 पर घातांक** $4 = 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

-3 **की चतुर्थ घात** $= (-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$

-5 **घात** $4 = (-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 625$

10 घात $4 = (10)^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$

2 की पाँचवीं घात अर्थात् 2 घात 5 $= 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
-3 की पाँचवीं घात $= (-3)^5 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = -243$
-5 घात 5 $= (-5)^5 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = -3125$
10 घात 5 $= (10)^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100000$

घातांक संकेतन के प्रयोग से हमें बड़ी संख्याओं को संक्षेप और सुन्दर प्रकार से लिखने में सहायता मिलती है। क्या आपको स्थानीय-मान की संकलपना में 10 की घातों के प्रयोग के बारे में याद है ?

यह सरलता से जाँच की जा सकती है कि

$$(-1)^{\text{विषम धनात्मक पूर्णांक}} = -1$$
$$(-1)^{\text{सम धनात्मक पूर्णांक}} = +1$$

यदि a कोई पूर्णांक हो तो a^2 भी एक पूर्णांक होता है और इसे एक **पूर्ण वर्ग** (*perfect square*) कहते हैं। पहले पाँच शून्येतर पूर्ण वर्ग पूर्णांक $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$ तथा $5^2 = 25$ हैं। अगले दो पूर्ण वर्ग पूर्णांक कौन से हैं ?

पुन: यदि a कोई पूर्णांक हो, तो a^3 भी एक पूर्णांक होता है और इसे एक **पूर्ण घन** (*perfect cube*) कहते हैं। पहले पाँच धनात्मक पूर्ण घन पूर्णांक $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$ तथा $5^3 = 125$ हैं। अगले दो पूर्ण घन पूर्णांक कौन से हैं ?

हम इसी प्रकार पूर्णांकों की चतुर्थ घात, पंचम घात, इत्यादि ज्ञात कर सकते हैं।

प्रश्नावली 5.1

1. निम्न में से प्रत्येक में वह संख्यांक लिखिए जो घातांक में है :
   (i) $(20)^8$ (ii) $(-7)^4$ (iii) 2^3 (iv) $(-5)^2$ (v) $(-1)^{644}$
2. ज्ञात कीजिए :
   (i) 16 का वर्ग
   (ii) -4 का घन
   (iii) -14 का वर्ग
   (iv) 3 की चतुर्थ घात
3. निम्न को घातांक संकेतन में लिखिए :
   (i) 7
   (ii) $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$
   (iii) $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$
   (iv) -26

4. ज्ञात कीजिए :

(i) 50^2 (ii) 4^3 (iii) 3^4 (iv) $(-1)^{20}$ (v) 1^{16}
(vi) $(-1)^{63}$ (vii) 1^{37} (viii) $(-2)^5$ (ix) 2^5 (x) 2^{10}

5. सरल कीजिए :

(i) $2^3 \times 3^2$ (ii) $(-2)^2 \times (-3)^3$
(iii) $(-1)^3 \times (-10)^2$ (iv) $2^3 \times (-3)^2 \times 8$
(v) $(5)^2 \times (10)^2 \times (-1)^3$ (vi) $(-5)^3 \times (-2)^3$
(vii) $(3)^2 \times (10)^4 \times (-1)^{10}$ (viii) $(-2)^4 \times (-3)^3 \times (-1)$

6. निम्न के घन ज्ञात कीजिए :

(i) -12 (ii) -25 (iii) -9 (iv) 100 (v) 20

7. प्रथम दस धनपूर्णांकों के वर्ग ज्ञात कीजिए। इनके एकक अंकों को देखिए। आप क्या देखते हैं ?

8. प्रथम नौ धनपूर्णांकों के घन ज्ञात कीजिए।

9. 10^2, 20^2, 30^2, 100^2, 200^2 तथा 1000^2 ज्ञात कीजिए। (हम देखेंगे कि **पूर्णांक के वर्ग में दाईं ओर शून्यों की संख्या, पूर्णांक में दाईं ओर शून्यों की संख्या की दुगुनी है।**)

5.2 वर्गमूल

हम अनुच्छेद 5.1 में देख चुके हैं कि किसी पूर्णांक का वर्ग उस पूर्णांक को उसी से गुणा करने प्राप्त होता है। इसकी विलोम प्रक्रिया अर्थात् ऐसा पूर्णांक ज्ञात करना जिसका वर्ग करने पर दिया हु पूर्णांक प्राप्त हो जाए, पूर्णांक का 'अवर्ग करने (*unsquaring*)' की प्रक्रिया या उसका **वर्गमूल** (*squa root*) ज्ञात करने की प्रक्रिया कहलाती है। उदाहरणार्थ 16 का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए हमें ऐ पूर्णांक ज्ञात करने की आवश्यकता है जिसका वर्ग 16 हो। स्पष्ट है ऐसा पूर्णांक 4 या -4 इनमें से प्रत्येक 16 का वर्गमूल कहलाता है।

(इस एकक में **हम अपने को पूर्ण वर्गों के वर्गमूल निकालने तक ही सीमित रखेंगे**। साथ **हम केवल धनात्मक वर्गमूल ज्ञात करेंगे** क्योंकि फिर दूसरा वर्गमूल सरलता से लिखा जा सकता है। तरह हम केवल एक वर्गमूल की बात करेंगे। **धनात्मक वर्गमूल के लिए हम** $\sqrt{\ }$ संकेत का प्रयो करते हैं। उदाहरणार्थ, हम $\sqrt{16}=4$ तथा $-\sqrt{16}=-4$ लिखते हैं।)

उदाहरण 1 : 49 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $7^2=49$। इस प्रकार, $\sqrt{49}=7$

उदाहरण 2 : 625 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $625=5\times5\times5\times5$ अर्थात् 25×25

इस प्रकार, $\sqrt{625}=25$

उदाहरण 3 : 1764 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : पहली ही दृष्टि में हम यह नहीं कह सकते कि कौनसा ऐसा पूर्णांक है जिसका वर्ग 1764 है। अतः हम 1764 के गुणनखंड ज्ञात करते हैं। हम देखते हैं कि

$$1764 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$$
$$= 2^2 \times 3^2 \times 7^2$$

इस प्रकार, $\sqrt{1764} = 2 \times 3 \times 7 = 42$

2	1764
2	882
3	441
3	147
7	49
	7

हम देखते हैं कि

किसी पूर्ण वर्ग का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए, हम

(क) दिए हुए पूर्णांक के गुणनखंड ज्ञात करते हैं,

(ख) पूर्णांक के गुणनखंडों के प्रत्येक युग्म में से हम, वर्गमूल में सम्मिलित करने के लिए एक एक गुणनखंड चुन लेते हैं, और

(ग) यदि आवश्यक हो तो, चुने हुए गुणनखंडों का गुणा कर देते हैं।

यह विधि, प्रत्यक्ष कारणों से, **गुणनखंड विधि** (*factor method*) कहलाती है। इसका प्रयोग हम यह ज्ञात करने में कर सकते हैं कि कोई दिया हुआ पूर्णांक पूर्ण वर्ग है या नहीं। यदि दिए हुए पूर्णांक में कोई ऐसा गुणनखंड है जो एक युग्म में नहीं आता तो स्पष्ट है कि वह पूर्णांक पूर्ण वर्ग नहीं होगा।

उदाहरण 4 : 1089 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि

$$\sqrt{1089} = \sqrt{3^2 \times 11^2}$$

3	1089
3	363
11	121
	11

इस प्रकार, 1089 का एक वर्गमूल 3×11 अर्थात् 33 है। इसलिए दूसरा वर्गमूल -33 होगा। किसी पूर्णांक का **घनमूल** (*cube root*) वह पूर्णांक होता है जिसका घन दिया हुआ पूर्णांक हो। आप किसी पूर्णांक के **चतुर्थमूलों** (*fourth roots*), **पंचमूलों** (*fifth roots*) इत्यादि को किस प्रकार परिभाषित करेंगे। (घनमूल, चतुर्थमूल, पंचमूल, इत्यादि का अध्ययन इस पुस्तक की सीमा के बाहर है। हम अपने को केवल वर्गमूल ज्ञात करने तक ही सीमित रखेंगे।)

प्रश्नावली 5.2

1. निम्न में से प्रत्येक का वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

   (i) 100 (ii) 256 (iii) 225 (iv) 169
   (v) 196 (vi) 324 (vii) 10000 (viii) 676
   (ix) 1000000

2. $\sqrt{289}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{3600}$ तथा $\sqrt{784}$ के मान बताइए।

3. ज्ञात कीजिए कि निम्न में से कौन कौन पूर्ण वर्ग हैं :

   7, 121, 144, 18, 11025

4. चूँकि $0 \times 0 = 0$, अतः हम $0^2 = 0$ लिखते हैं और कहते हैं कि शून्य का वर्ग शून्य है। शून्य का वर्गमूल क्या है ?

एकक VI

संख्याओं के गुण

पिछले एककों में हमने पूर्ण संख्याओं और पूर्णांकों पर संक्रियाओं के गुणों का अध्ययन किया था। अब हम संख्याओं, विशेषकर, पूर्ण संख्याओं के कुछ रोचक गुणों का पता लगाएंगे। हम संख्याओं के 2, 3, 4, 5 इत्यादि से विभाजित होने के नियमों का भी अध्ययन करेंगे।

6.1 गुणनखंड और गुणज

हम यह पहले से ही जानते हैं कि किसी संख्या के **गुणनखंड** (*factor*) का क्या अर्थ है। वास्तव में हम इनको, अनुच्छेद 5.2 में पूर्ण वर्ग पूर्णांकों के वर्गमूल ज्ञात करने में प्रयोग कर चुके हैं।

आपको याद होगा कि **वह संख्या जो 2 से (पूर्णतया) विभाजित हो जाए, सम संख्या** (*even number*) **कहलाती है।** 0, 2, 4, 6, इत्यादि सम संख्याओं के कुछ उदाहरण हैं। **वह संख्या जो 2 से (पूर्णतया) विभाजित न हो, विषम संख्या** (*odd number*) **कहलाती है।** 1, 3, 5, 7, इत्यादि विषम संख्याओं के उदाहरण हैं। हम देखते हैं कि यदि किसी संख्या को 2 से विभाजित करने पर शेष 1 प्राप्त हो तो वह संख्या विषम होती है। (क्यों ?)

संख्या 12 को लीजिए। हम, उदाहरण के तौर पर, इसे $12 = 3 \times 4$ लिख सकते हैं। हम कहते हैं कि 12, 3 का एक **गुणज** (*multiple*) है। 12, 4 का भी एक **गुणज** है। पूर्ण संख्याओं में, 3 के और भी **गुणज** हैं जैसे कि 0, 3, 6, 9, 15, 18, 21 इत्यादि। इसी प्रकार 4 के भी और गुणज हैं जैसे कि 0, 4, 8, 16, 20, 24, 28 इत्यादि। आप क्या देखते हैं? क्या यह सत्य नहीं है कि जब आपने अपनी गुणन सारणियाँ (*multiplication tables*) याद की थीं तो आप वास्तव में विभिन्न संख्याओं के क्रमागत गुणज ही सीख रहे थे ?

प्रश्नावली 6.1

1. **(पुनर्निरीक्षण प्रश्न)** 60 के सभी गुणनखंड लिखिए।
[याद रखिए कि इनमें 1 और 60 भी गुणनखंड हैं।]

2. (क) 1 से प्रारम्भ करके दो दो के अंतर पर संख्याएँ गिनिए। आपको किस प्रकार की संख्याएँ प्राप्त होती हैं ?

(ख) 0 से प्रारम्भ करके दो दो के अंतर पर संख्याएँ गिनिए। आपको किस प्रकार की संख्याएँ प्राप्त होती हैं?

[देखिए कि सम संख्याएँ 2 का गुणज हैं।]

(ग) 0 से प्रारम्भ करके चार चार के अंतर पर संख्याएँ गिनिए। आपको किस प्रकार की संख्याएँ प्राप्त होती हैं?

3. रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) 343, 7 का गुणज है। अतः 7, 343 का एक ... है।

(ii) 27, 36, 45, 54 और 63 ... के तथा ... के गुणज हैं।

(iii) 76 के सभी गुणनखंड ... हैं।

4. हम एक कमरे में 30 कुर्सियाँ इस प्रकार रखना चाहते हैं कि प्रत्येक पंक्ति में कुर्सियों की संख्या बराबर हो। **क्या ऐसा करने की केवल एक ही विधि है?** हम कितनी पंक्तियाँ बना सकते हैं?

6.2 अभाज्य और भाज्य संख्याएँ

3 के गुणनखंड क्या हैं? 5 के गुणनखंड क्या हैं? 7 के गुणनखंड क्या हैं? 11 के गुणनखंड क्या हैं? हम देखते हैं कि इनमें से प्रत्येक संख्या में 1 और स्वयं उस संख्या को छोड़कर इनका **अन्य कोई** गुणनखंड नहीं है। ऐसी संख्याएँ **अभाज्य संख्याएँ** (*prime numbers*) कहलाती हैं। 13, 17, 19, 23, इत्यादि अभाज्य संख्याओं के कुछ अन्य उदाहरण हैं। इस प्रकार,

यदि किसी संख्या के गुणनखंड केवल 1 और वह संख्या स्वयं ही हों तो वह संख्या, अभाज्य संख्या कहलाती है, अन्यथा वह संख्या भाज्य संख्या (*composite number*) **कहलाती है।**

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, इत्यादि भाज्य संख्याओं के कुछ उदाहरण हैं। **संख्या 1 न तो अभाज्य है और न ही भाज्य।**

हम देखते हैं कि 2 **सबसे छोटी अभाज्य संख्या है।** वास्तव में, **केवल 2 ही एक ऐसी अभाज्य संख्या है जो कि सम भी है।**

अब क्या हम, उदाहरणार्थ, 1 और 100 के मध्य सभी अभाज्य संख्याओं की सूची बना सकते हैं? एक यूनानी गणितज्ञ और खगोलशास्त्री (*astronomer*) इरेटोसथीन्स (*Eratosthenes*) [274 ई० पू० — 194 ई० पू०] ने अभाज्य संख्याओं को छाँटने (छानने) की एक बहुत ही सरल विधि ज्ञात की। उसकी यह विधि **इरेटोसथीन्स की सीव** (*Sieve of Eratosthenes*) कहलाती है, परन्तु हम इसे केवल **सीव विधि** ही कहेंगे।

हम पहले 1 से लेकर 100 तक की संख्याओं को दस दस की 10 पंक्तियों में लिखते हैं। हम 1 को काट देते हैं। (क्यों?)

संख्या 2 अभाज्य है। इसलिए हम 2 को ऐसा ही रखते हैं तथा 4 से प्रारम्भ करके 2 के सभी गुणजों को काट देते हैं। (व्यावहारिक तौर पर, हम 4 से प्रारम्भ करके प्रत्येक **दूसरी** संख्या को काटते जाते हैं।)

आगे, संख्या 3 अभाज्य है। इसलिए हम 3 को ऐसा ही रखते हैं तथा 6 से प्रारम्भ करके 3 के सभी गुणजों को काट देते हैं। [पुन: हम यहाँ 6 से प्रारम्भ करके प्रत्येक **तीसरी** संख्या को काटते जाएँगे। हम देखेंगे कि इनमें से कुछ संख्याएँ पहले ही कटी हुई हैं। (क्यों ?)]

इरेटोसथीन्स की सीव

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

अब, 4 के गुणज पहले ही कट चुके हैं क्योंकि 4, 2 का गुणज भी है।

आगे, 5 एक अभाज्य संख्या है। इसलिए हम 5 को ऐसा ही रखते हैं और 10 से प्रारम्भ करके प्रत्येक **पाँचवीं** संख्या को काट देते हैं।

हम अभाज्य संख्याओं को क्रम से ऐसा ही रखते हुए और उनके गुणजों को काटते हुए इस क्रिया को तब तक जारी रखते हैं जब तक कि हमारे पास काटने के लिए कोई और संख्या न बचे।

हमारे पास काटने के लिए कब कोई संख्या नहीं बचेगी ? हम देखते हैं कि 7 के सभी गुणजों को काटने के बाद हमारे पास काटने के लिए कोई संख्या नहीं बचेगी। (क्यों ?)

इस प्रकार 1 से लेकर 100 के मध्य में निम्न अभाज्य संख्याएँ हैं :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

इरेटोसथीन्स ने शायद, संख्याओं को काटने के स्थान पर कागज़ में छेद किये थे। इसलिए कागज़ एक छलनी (*sieve*) की तरह लगता था। संभवतः इसी कारण से यह विधि सीव विधि कहलाती है।

हम देखते हैं कि क्रमागत अभाज्य संख्याओं से उनके विषय में कोई प्रतिरूप (*pattern*) स्पष्ट नहीं होता। गणितज्ञों ने कई शताब्दियों तक ऐसे सूत्रों को निकालने या खोजने के प्रयत्न किए जिनसे सभी अभाज्य संख्याएँ प्राप्त हो जाएँ। वे इसमें असफल रहे। अभाज्य संख्या ज्ञात करने की केवल एक ही विधि है वह यह कि प्रत्येक संख्या की जाँच की जाए कि, 1 और स्वयं उस संख्या को छोड़कर, उसके अन्य कोई गुणनखंड है या नहीं। निस्संदेह, अब कम्प्यूटरों (*computors*) के आने से हम बड़ी बड़ी संख्याओं की जाँच करने में समर्थ हो चुके हैं। क्या आप जानते हैं कि 39 अंकों की संख्या

170141183460469231731687303715884105727

एक अभाज्य संख्या है? कम्प्यूटर और बड़ी अभाज्य संख्याओं की खोज कर रहा है।

प्रश्नावली 6.2

1. एक सम संख्या बताइए जो कि अभाज्य भी हो।

2. क्या कोई भाज्य संख्या विषम हो सकती है? यदि हाँ, तो ऐसी छोटी से छोटी संख्या कौन सी है?

3. 100 से छोटी अभाज्य संख्याओं की सूची में हम देखते हैं कि युग्म 3, 5 में अभाज्य संख्याओं का अंतर 2 है। इसी प्रकार युग्मों 5, 7 और 11, 13 में भी अभाज्य संख्याओं का अंतर 2 है। अभाज्य संख्याओं के ऐसे युग्मों को **अभाज्य युग्म** (*twin primes*) कहते हैं। 100 से छोटे सभी अभाज्य युग्म लिखिए।

4. देखिए, हम 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 3 + 7 या 5 + 5, 12 = 5 + 7, इत्यादि लिख सकते हैं। हम देखते हैं कि ये सब सम संख्याएँ हैं जिन्हें दो विषम अभाज्य संख्याओं (*odd primes*) के योग के रूप में लिखा गया है। 14, 16, 18, 20, 22, 24, 30 और 56 को दो विषम अभाज्य संख्याओं के योग के रूप में लिखिए। [सन् 1742 में गोल्डबैच (*Goldbach*) नामक एक गणितज्ञ ने अपने मित्र को एक पत्र में लिखा कि उसने एक अनुमान (*conjecture*) या (*guess*) लगाया है। वह इस अनुमान की कोई उपपत्ति (*proof*) नहीं दे सका। गोल्डबैच का अनुमान था कि

4 से बड़ी प्रत्येक सम संख्या को दो विषम अभाज्य संख्याओं के योग के रूप में लिखा जा सकता है।

उसका मित्र भी इसकी कोई उपपत्ति नहीं दे सका। वास्तव में, अभी तक कोई भी गणितज्ञ न तो इसकी उपपत्ति दे सका है और न ही कोई ऐसा उदाहरण देकर जिसमें गोल्डबैच का अनुमान सही न बैठता हो यह सिद्ध कर सका है कि गोल्डबैच का यह अनुमान असत्य है। गणित में यह अभी तक बिना हल हुई समस्या (*unsolved problem*) है और यह **गोल्डबैच कनजैक्चर** (*Goldbach Conjecture*) कहलाती है।

5. निम्न में कौन सी संख्याएँ अभाज्य हैं :
   (i) 957 (ii) 139 (iii) 204
6. ऐसी सात क्रमागत संख्याएँ लिखिए जिनमें से प्रत्येक 100 से छोटी एक भाज्य संख्या हो।

6.3 अभाज्य गुणनखंडन

हम गुणनखंडों और अभाज्यों के विषय में पढ़ चुके हैं। उदाहरणार्थ,

$12 = 3 \times 4$ या $3 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^2$

$15 = 3 \times 5$

$24 = 2 \times 12$ या 3×8 या 4×6 या $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

हम देखते हैं कि एक संख्या का कई प्रकार से गुणनखंडन (*factorization*) हो सकता है। साथ ही हम देखते हैं कि 12 के गुणनखंडन $3 \times 2 \times 2$ में प्रत्येक गुणनखंड एक अभाज्य संख्या है। इसी प्रकार 24 के गुणनखंडन $2 \times 2 \times 2 \times 3$ में प्रत्येक गुणनखंड एक अभाज्य संख्या है। ऐसे गुणनखंडन, **अभाज्य गुणनखंडन** (*prime factorization*) कहलाते हैं। दूसरे शब्दों में,

कोई गुणनखंडन, अभाज्य होता है जबकि उसके सभी गुणनखंड अभाज्य हों।

हम देखते है कि हम किसी भी गुणनखंडन से प्रारम्भ करके अंत में अभाज्य गुणनखंडन पर आ सकते हैं। उदाहरणार्थ,

$112 = 7 \times 16 = 7 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

या, $112 = 8 \times 14 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7$

या, $112 = 28 \times 4 = 7 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

हम यह भी देखते हैं कि प्रत्येक अभाज्य गुणनखंडन में, गुणनखंडों को तो भिन्न प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है परन्तु वास्तव में, **अभाज्य गुणनखंडन अद्वितीय** (*unique*) **है**। यह गुण, अर्थात् **किसी भाज्य संख्या का केवल एक ही अभाज्य गुणनखंडन होता है, अभाज्य गुणनखंडन गुण** (*Prime Factorization Property*) **या अंकगणित की आधारभूत प्रमेय** (*Fundamental Theorem of Arithmetic*) कहलाती है।

(इस गुण की उपपत्ति, इस पुस्तक की सीमा के बाहर है।)

प्रश्नावली 6.3

1. निम्न का एक से अधिक प्रकार से गुणनखंडन कीजिए :
   54, 62, 72
2. निम्न के अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात कीजिए :
   90, 108, 9000, 221, 7325, 8712, 13915
   [जहाँ संभव हो घातांक संकेतन प्रयोग कीजिए।]
3. 3 अंकों की छोटी से छोटी संख्या लिखिए और उसे अभाज्यों के गुणा के रूप में व्यक्त कीजिए।

6.4 संख्याओं से विभाज्य होने की जाँच

अभी तक यह ज्ञात करने के लिए कि कोई संख्या, उदाहरण के तौर पर, 2 या 3 या 5 या 9 से विभाजित है या नहीं अर्थात् विभाज्य (*divisible*) है या नहीं हम केवल यह विधि जानते हैं कि संख्या को 2 या 3 या 5 या 9 से विभाजित करें और देखें कि कुछ शेष बचता है या नहीं। परन्तु इसमें समय अधिक लगता है और यह अनावश्यक भी है। बहुत सी सरल विधियाँ उपलब्ध हैं जिनसे यह जाँच (*test*) की जा सकती है कि कोई संख्या कुछ अन्य संख्याओं से विभाजित है या नहीं।

6.4.1 आइए, उदाहरणार्थ, 10 के गुणज लिखें। ये 0, 10, 20, 30, 40, 50, इत्यादि हैं। हम क्या देखते हैं? प्रत्येक संख्या '0' पर समाप्त होती है। इससे हमें तुरन्त यह जाँच करने का **नियम** प्राप्त हो जाता है कि कोई संख्या 10 से विभाज्य है या नहीं।

कोई संख्या 10 से विभाज्य होती है जबकि वह '0' पर समाप्त होती हो।

6.4.2 5 से विभाजन के बारे में आप क्या सोचते हैं? आइए, 5 के गुणजों को देखें। ये 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, इत्यादि हैं। प्रत्येक संख्या या तो 0 पर या 5 पर समाप्त होती है। हम कहते हैं कि

कोई संख्या 5 से विभाज्य होती है जबकि वह '0' या 5 पर समाप्त होती हो।

6.4.3 निस्संदेह यह बताना बहुत ही सरल है कि कोई संख्या 2 से विभाज्य है या नहीं। इसके लिए संख्या को सम होना चाहिए। अब, सम संख्याएँ किस प्रकार की दिखती हैं? ये 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, इत्यादि हैं। क्या अब आप 2 से विभाज्यता (*divisibility*) की कोई जाँच बता सकते हैं?

कोई संख्या 2 से विभाज्य होगी जबकि वह 0 या 2 या 4 या 6 या 8 पर समाप्त होती हो। वास्तव में, हम और भी अच्छा कर सकते हैं। हम केवल यह भी कह सकते हैं कि

कोई संख्या 2 से विभाज्य होती है जबकि वह किसी सम अंक (*even digit*) पर समाप्त होती हो।

इससे पहले कि हम विभाज्यता की अन्य जाँचों पर विचार करें, हम एक रोचक गुणधर्म सीखेंगे।

6.4.4 संख्याएँ 316 और 108 दोनों ही 2 से विभाजित हो जाती हैं। इनके योग के बारे में आप क्या सोचते हैं? 316+108=424 जो कि एक सम अंक पर समाप्त होता है। इसलिए विभाज्यता की जाँच (*divisibility test*) के अनुसार, यह योग 2 से विभाज्य है। क्या इनका अंतर भी 2 से विभाज्य है?

3165 और 2625 दोनों ही 5 से विभाज्य हैं। इनके अंतर के बारे में आप क्या सोचते हैं? 3165−2625=540। अब 540, 0 पर समाप्त होता है। इसलिए विभाज्यता की जाँच के अनुसार 540, 5 से विभाज्य है। क्या इनका योग भी 5 से विभाज्य है?

वास्तव में यह सरलता से सिद्ध किया जा सकता है कि **किसी दी हुई संख्या से विभाज्य संख्याओं का योग और अंतर भी उस संख्या से विभाज्य होता है।** परन्तु इसकी उपपत्ति इस पुस्तक की सीमा के बाहर है और इसे बाद में उपयुक्त स्थान पर बताया जाएगा।

6.4.5 अब हम 3 और 9 के लिए विभाज्यता के नियम खोजेंगे। आइए उदाहरणार्थ संख्या **5871 को लें और** यह ज्ञात करने का प्रयत्न करें कि यह (i) 3, (ii) 9 से विभाज्य है या नहीं।

हम 5871 को प्रसारित संकेतन में लिखते हैं, अर्थात्

$5871 = 5\times 1000 + 8\times 100 + 7\times 10 + 1\times 1$

अब, $10 = 9+1$, इसलिए वितरण गुण के कारण $7\times 10 = 7\times (9+1) = 7\times 9 + 7$

इसी प्रकार, $8\times 100 = 8\times 99 + 8$

तथा, $5\times 1000 = 5\times 999 + 5$

इस प्रकार,

$5871 = (5\times 999 + 5) + (8\times 99 + 8) + (7\times 9 + 7) + 1$

अब, 9, 99, 999, इत्यादि में से प्रत्येक 3 और 9 दोनों से विभाज्य है। अतः 5871

(i) 3 से विभाज्य होगा यदि $5+8+7+1$, 3 से विभाज्य हो।

(ii) 9 से विभाज्य होगा यदि $5+8+7+1$, 9 से विभाज्य हो।

परन्तु यह $5+8+7+1$ क्या है? यह दी हुई संख्या के अंकों का योग है। हम कहते हैं कि कोई संख्या

(i) 3 से विभाज्य होती है यदि उसके अंकों का योग 3 से विभाज्य हो।

(ii) 9 से विभाज्य होती है यदि उसके अंकों का योग 9 से विभाज्य हो।

हम देखते हैं कि 5871, 3 से विभाज्य है परन्तु 9 से नहीं।

उदाहरण 1: ज्ञात कीजिए कि 267525 निम्न से विभाज्य है या नहीं :

(i) 3 (ii) 9

हल: दी हुई संख्या में अंकों का योग $2+6+7+5+2+5 = 27$ है जो कि 3 और 9 दोनों से विभाज्य है।

अतः स्वयं संख्या भी 3 और 9 से विभाज्य है।

6.4.6 अब हम 4 और 8 के लिए विभाज्यता के नियम खोजेंगे। हम जानते हैं कि 1 और 10, 4 से विभाज्य नहीं हैं, परन्तु 100, 1000, 10000, इत्यादि विभाज्य हैं। अब आइए एक संख्या 4728 लें। हम लिखते हैं कि

$4728 = 4\times 1000 + 7\times 100 + 2\times 10 + 8\times 1$

चूंकि 1000 और 100, 4 से विभाज्य हैं तथा 10 और 1 विभाज्य नहीं हैं इसलिए स्पष्ट है कि संख्या 4728, 4 से तब ही विभाज्य होगी जबकि $2\times 10 + 8\times 1$, 4 से विभाज्य हो।

परन्तु यह $2\times 10 + 8\times 1$ क्या है? यह 28 है अर्थात् दी हुई संख्या में अंतिम दो (एकक और दस के स्थानों के) अंक हैं।

हम कहते हैं,

कोई संख्या 4 से विभाज्य होती है यदि उसके अंतिम दो अंकों से (अंकों के, क्रम में ही) बनी संख्या 4 से विभाज्य हो।

हम देखते हैं कि 4728, 4 से विभाज्य है।

हम विद्यार्थियों के अभ्यास के लिए यह छोड़ रहे हैं कि वे जाँच करें कि

कोई संख्या 8 से विभाज्य होती है यदि उसके अंतिम तीन अंकों से (अंकों के क्रम में ही) बनी संख्या 8 से विभाज्य हो।

उदाहरण 2: क्या 12504, 8 से विभाज्य है?

हल : इसके अंतिम तीन अंकों से बनी संख्या 504 है जो कि 8 **से विभाज्य है।**

अत: 12504, 8 से विभाज्य है।

6.4.7 अंत में हम किसी संख्या की 11 से विभाज्यता पर विचार करते हैं। आइए, उदाहरणार्थ देखें कि 296813, 11 से विभाज्य है या नहीं। हम लिखते हैं,

$$296813 = 2 \times 100000 + 9 \times 10000 + 6 \times 1000 + 8 \times 100 + 1 \times 10 + 3 \times 1$$

हम जानते हैं कि 11, 11 से विभाज्य है, इसलिए हम

$10 = 11 - 1$ लिखते हैं।

हम यह भी जानते हैं कि 99, 11 से विभाज्य है, इसलिए हम

$100 = 99 + 1$ लिखते हैं।

इन्हीं कारणों से, हम $1000 = 1001 - 1$, $10000 = 9999 + 1$ और $100000 = 100001 - 1$ लिखते हैं। इस प्रकार

$$296813 = 2(100001 - 1) + 9(9999 + 1) + 6(1001 - 1) + 8(99 + 1) + 1(11 - 1) + 3 \times 1$$

स्पष्ट है, 296813, 11 से विभाज्य होगा, यदि

$-2 + 9 - 6 + 8 - 1 + 3$, 11 से विभाज्य हो।

परन्तु यह $-2 + 9 - 6 + 8 - 1 + 3$ क्या है? हम इसे $3 + 8 + 9 - (1 + 6 + 2)$ लिख सकते हैं और देख सकते हैं कि यह (एकक स्थान से प्रारम्भ करते हुए) विषम स्थानों के अंकों के योग तथा सम स्थानों के अंकों के योग का अंतर है।

हम देखते हैं कि $-2 + 9 - 6 + 8 - 1 + 3 = 11$ है जो कि 11 से विभाज्य है। अत: 296813 11 से विभाज्य है। हम कहते हैं,

कोई संख्या 11 से विभाज्य होती है, यदि उसके (एकक स्थान से प्रारम्भ करते हुए) विषम स्थानों के अंकों के योग तथा सम स्थानों के अंकों के योग का अंतर 11 से विभाज्य हो।

उदाहरण 3 : क्या 4932718, 11 से विभाज्य है?

हल : इसके विषम स्थानों के अंकों का योग $= 8 + 7 + 3 + 4 = 22$ है।

इसके सम स्थानों के अंकों का योग $= 1 + 2 + 9 = 12$ है।

इनका अंतर $(22 - 12)$, 11 से विभाज्य नहीं है। अत: संख्या 4932718, 11 से विभाज्य नहीं है।

पाठक को चाहिए कि वह विभिन्न विभाज्यता नियमों की सूची बनाएँ। इन नियमों की उपपत्तियाँ इस पुस्तक की सीमा के बाहर हैं और इनके विषय में बाद में बताया जाएगा।

प्रश्नावली 6.4

1. बताइए निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं :
   (i) यदि कोई संख्या 2 से विभाज्य है तो वह 4 से भी विभाज्य होती है।
   (ii) यदि कोई संख्या 4 से विभाज्य है तो वह 2 से भी विभाज्य होती है।

(iii) यदि कोई संख्या 3 से विभाज्य है तो वह 9 से भी विभाज्य होती है।

(iv) यदि कोई संख्या 9 से विभाज्य है तो वह 3 से भी विभाज्य होती है।

2. ऐसी संख्या का एक उदाहरण दीजिए जो कि

(i) 3 से विभाज्य है परन्तु 9 से नहीं।

(ii) 5 से विभाज्य है परन्तु 10 से नहीं।

3. यदि कोई संख्या 2 और 3 दोनों से विभाज्य हो तो वह 6 से भी विभाज्य होगी। अब 2 से विभाज्य होने के लिए, संख्या को किसी सम अंक पर समाप्त होना चाहिए। 3 से विभाज्य होने के लिए अंकों का योग, 3 से विभाज्य होना चाहिए। हम कहते हैं कि **कोई संख्या 6 से विभाज्य होती है, यदि उसके अंकों का योग 3 से विभाज्य हो तथा वह एक सम अंक पर समाप्त होती हो।**

ज्ञात कीजिए कि क्या निम्न संख्याएँ 6 से विभाज्य हैं :

(i) 72354 (ii) 40083

4. ज्ञात कीजिए कि निम्न में कौन कौन 2, 3, 5, 9, 10 से विभाज्य हैं :

(i) 390 (ii) 126 (iii) 567 (iv) 4566

(v) 7530 (vi) 715230 (vii) 325

5. क्या 1060301, 11 से विभाज्य है ?

6. क्या 980122, 11 से विभाज्य है ?

7. निम्न में से कौन कौन सी संख्याएँ 11 से विभाज्य हैं :

(i) 432311 (ii) 57860 (iii) 439

विविध प्रश्नावली III

(एकक V और VI पर)

1. 10^4, 26^2, 101^2, $(-11)^3$, 9^5, $(-1)^{123}$ और $(-1)^{462}$ के मान ज्ञात कीजिए।
2. 441, 15625 और 1024 के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।
3. 90 से कम 12 के सभी गुणज लिखिए।
4. 8025 के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।
5. पता लगाइए कि निम्न में से कौन सी संख्याएँ अभाज्य हैं :

   112, 323, 151, 135
6. 100 और 110 के मध्य की अभाज्य संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
7. 819, 3105 और 153549 के अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात कीजिए।

8. हम जानते हैं कि कोई भी सम संख्या 2 से विभाज्य होती है। दूसरे शब्दों में, हम किसी भी (पूर्ण) सम संख्या को किसी पूर्ण संख्या के दुगुने के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। संकेतों का प्रयोग कर, हम लिखते हैं कि

$$a=2\,m$$

जबकि 'a' सम संख्या को तथा 'm' पूर्ण संख्या को व्यक्त करता है। इस प्रकार हम, उदाहरणार्थ $8=2\times4$ या $612=2\times306$ लिख सकते हैं।

निम्न को उपर्युक्त रूप में लिखिए :

16, 234, 0, 82

9. चूँकि जब किसी विषम संख्या को 2 से विभाजित किया जाता है तो सदैव 1 शेष रहता है, इसलिए हम किसी भी विषम संख्या 'a' को निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$a=2m+1$$

जबकि m पूर्ण संख्या है। उदाहरणार्थ,

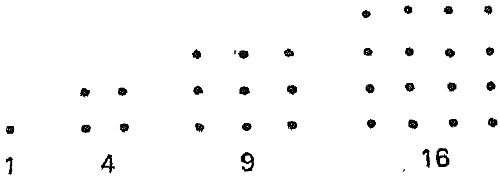
$1=2\times0+1$, $7=2\times3+1$, $981=2\times490+1$

निम्न को उपर्युक्त रूप में लिखिए :

5, 19, 325, 6081

10. ऐसी संख्या जो कि 1 सहित परन्तु स्वयं को छोड़कर अपने सभी गुणनखंडों के योग के बराबर होती है **संपूर्ण संख्या** (*perfect number*) कहलाती है। उदाहरणार्थ 6, एक संपूर्ण संख्या है क्योंकि $6=1+2+3$। 40 से छोटी एक और संपूर्ण संख्या है। उसे ज्ञात कीजिए।

11. बिंदुकित प्रतिरूप (*dot pattern*) में संख्या 4 को दो दो बिंदुओं की 2 पंक्तियों में, 9 को तीन तीन बिंदुओं को 3 पंक्तियों में, 16 को चार चार बिंदुओं की 4 पंक्तियों में लिखा जा सकता है। (देखिये आकृति 6.1) ऐसी संख्याएँ **वर्ग संख्याएँ** (*square numbers*) कहलाती हैं।

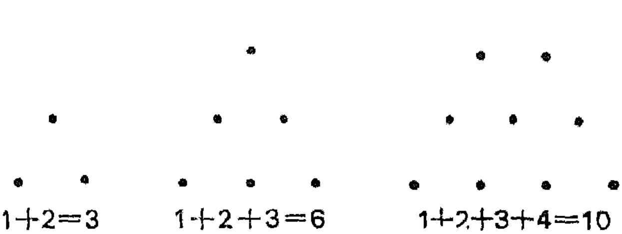


आकृति 6.1 : वर्ग संख्याएँ

(क्या आप इन संख्याओं का दूसरा नाम बता सकते हैं?)
अगली दो वर्ग संख्याओं के बिंदुकित प्रतिरूप बनाइए।

12. (क) जाँच कीजिए कि $(2\times 3\times 4\times 5)+1$ एक पूर्ण वर्ग है।
(ख) जाँच कीजिए कि $(8\times 9\times 10\times 11)+1$ एक पूर्ण वर्ग है।
(ग) कोई चार क्रमागत धनपूर्णांक लीजिए। इनको परस्पर गुणा करके, गुणनफल में 1 जोड़िए। जाँच कीजिए कि परिणामी संख्या एक पूर्ण वर्ग है।

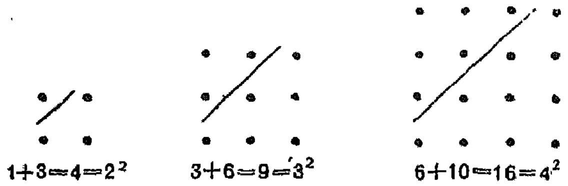
13. प्राचीन ग्रीस (*Greece*) देश में पाइथागोरस (*Pythagoras*) नाम का एक गणितज्ञ था। उसके जन्म की तारीख और स्थान दोनों ही अज्ञात हैं। परन्तु ऐसा अनुमान किया जाता है कि लगभग 580 और 568 ई० पू० के बीच में उसका जन्म हुआ था। उसने गणित का एक गुप्त स्कूल स्थापित किया और गणित में बहुत कुछ योगदान दिया। इस स्कूल के सदस्य पाइथागोरियन्स (*Pythagoreans*) कहे जाते हैं। पाइथागोरियन्स ने संख्याओं 1, $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$, $1+2+3+4+5=15$, इत्यादि को **त्रिभुजाकार संख्याएँ** (*triangular numbers*) कहा। इन संख्याओं को त्रिभुजाकार बिंदुकित प्रतिरूपों (*triangular dot patterns*) आकृति 6.2 की तरह दिखाया जा सकता है।



आकृति 6.2 : त्रिभुजाकार संख्याएँ

अगली चार त्रिभुजाकार संख्याएँ लिखिए और उनके बिंदुकित प्रतिरूप बनाइए।

14. यदि किन्हीं दो आसन्न त्रिभुजाकार संख्याओं को जोड़ें तो हमें एक वर्ग संख्या प्राप्त होती है। उदाहरणार्थ, $1+3=4=2^2$, $3+6=9=3^2$, $6+10=16=4^2$ इत्यादि। (देखिये आकृति 6.3)



आकृति 6.3

(i) चौथी और पाँचवीं त्रिभुजाकार संख्याओं का क्या योग है ?
(ii) पाँचवीं और छठी त्रिभुजाकार संख्याओं का क्या योग है ?
(iii) क्या आप सत्ताइसवीं और अट्ठाइसवीं त्रिभुजाकार संख्याओं का योग बता सकते हैं ?

एकक VII

पूर्णांकीय गुणांकों के बीजीय व्यंजक

हम संख्याओं को निरूपित करने के लिए अक्षरों (*letters*) का प्रयोग पहले ही, उदाहरणार्थ, पूर्ण संख्याओं या पूर्णांकों पर संक्रियाओं के गुणों को व्यक्त करते समय, कर चुके हैं। अब, हम इस एकक में एक क्रमबद्ध रूप में अंकगणित (*arithmetic*) से बीजगणित (*algebra*) की ओर गमन करेंगे। हम यह सीखेंगे कि इन अक्षर-संख्याओं के जोड़ने, घटाने और गुणा करने में इनका किस प्रकार प्रयोग किया जाता है।

7.1 अंकगणित से बीजगणित

एक महान जर्मन गणितज्ञ फलिक्स क्लीन (*Felix Klein*) [1849-1925] ने एक बार कहा था, 'वास्तविक गणित अक्षरों पर संक्रियाओं से, प्रारम्भ होती है।' हम इस पुस्तक और अपनी पिछली कक्षाओं में अक्षरों (*letters*) का संख्याओं को व्यक्त करने में पहले ही प्रयोग कर चुके हैं। क्या आप को याद है कि, उदाहरणार्थ, किसी आयत के क्षेत्रफल का सूत्र लिखने के लिए हमने अक्षरों जैसे A, l, w का प्रयोग किया था और लिखा था कि $A=l\times w$? इस सूत्र में A, आयत का क्षेत्रफल [के मात्रकों (*units*) की संख्या], l, लम्बाई (के मात्रकों की संख्या) तथा w, चौड़ाई (के मात्रकों की संख्या) व्यक्त करते हैं। इन अक्षरों के प्रवेश से हम और अधिक व्यापक पदों में विचार कर सकते हैं।

$A=l\times w$ से हम किसी भी आयत का क्षेत्रफल निकाल सकते हैं। उदाहरणार्थ, किसी आयत के लिए जिसमें l, मान लीजिए, 12 सेमी और w, मान लीजिए, 8 सेमी है, हम $A=l\times w$ में l और w के मान रखकर उसका क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं। **अक्षर A, l और w केवल संख्याएँ व्यक्त करते हैं।** यह व्यापक पदों में विचार करने में समर्थ होने के लिए संख्याएँ निरूपित करने में अक्षरों का प्रयोग, अंकगणित से बीजगणित की ओर गमन (*transition*) है।

हम, प्रत्यक्ष कारणों से, इन अक्षरों को **अक्षर संख्याएँ** (*literal numbers*) **कहेंगे। चूंकि ये संख्याएँ निरूपित करते हैं अतः स्पष्ट है कि इनको संख्याओं के योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन के सभी नियमों (और चिन्हों) तथा साथ ही इन संक्रियाओं के सभी गुणों का पालन करना चाहिए।**

कोई संख्या या आधारभूत संक्रियाओं (*fundamental operations*) के प्रयोग से बना संख्याओं का कोई समूह या संयोग (*combination*) **बीजीय व्यंजक** (*algebraic expression*) कहलाता है। $y-3x$, $a+b-c$, $4pq-4qr-4rs+4st$, 23, $2y$, $5n$, lwh इत्यादि बीजीय व्यंजकों के कुछ उदाहरण हैं। जब व्यंजक में '+', '−' के दो या दो से अधिक चिन्ह आते हैं तो वह कई भागों में पृथक हो जाता है। **अपने चिन्ह सहित प्रत्येक भाग व्यंजक का एक पद** (*term*) कहलाता है। प्रायः व्यंजक

के पहले पद के धन चिन्ह को छोड़ दिया जाता है अर्थात् उसका धन चिन्ह लिखा नहीं जाता। y और $-3x$ व्यंजक $y-3x$ के पद हैं; a, b और $-c$ व्यंजक $a+b-c$ के पद हैं।

जब किसी व्यंजक में एक ही पद हो तो वह **एकपदी** (*monomial*) कहलाता है। 23, $2y$, $5a$, twh, $4z$, इत्यादि एकपदियों के उदाहरण हैं। वह व्यंजक जिसमें दो पद हों **द्विपद*** (*binomial*) कहलाता है। $y-3x$, $23-z$, $2l+2w$ इत्यादि द्विपदों के कुछ उदाहरण हैं। **त्रिपद** (*trinomial*) क्या होता है? क्या आप बता सकते हैं? त्रिपदों के कुछ उदाहरण दीजिए।

किसी पद, उदाहरणार्थ $18xy$, में 18, x और y इस पद के **गुणनखंड** कहलाते हैं। x और y **अक्षर गुणनखंड** (*literal factors*) हैं; 18 एक **संख्यात्मक गुणनखंड** (*numerical factor*) है। इनमें से कोई भी एक गुणनखंड शेष गुणनखंडों के गुणनफल का **गुणांक** (*coefficient*) कहलाता है। इस प्रकार, पद $18xy$ में y, $18x$ का गुणांक है, पद $-4qr$ में $-q$, $4r$ का गुणांक है, पद $18xy$ में, 18, xy का गुणांक है। हम, कभी कभी, संख्यात्मक गुणनखंड को **पद का गुणांक** (*coefficient of the term*) भी कहते हैं। इस प्रकार 18 को पद $18xy$ का गुणांक भी कहा जा सकता है। जब किसी पद का गुणांक $+1$ या -1 होता है तो प्रायः '1' लिखा नहीं जाता। उदाहरणार्थ हम $1x$ को x तथा $-1x$ को $-x$ लिखते हैं।

जब किन्हीं पदों में अक्षर गुणनखंड एक से हों तो वे **समान पद** (*like terms*) कहलाते हैं, अन्यथा वे **असमान पद** (*unlike terms*) कहलाते हैं। उदाहरणार्थ, व्यंजक $2xy-3x+7xy+4x$ में $2xy$ और $7xy$ समान पद हैं, $-3x$ और $4x$ समान पद हैं। परन्तु व्यंजक $a+b-c$ या $y-3x$ या $4pq-4qr-4rs+4st$ में सभी पद, असमान पद हैं।

प्रश्नावली 7.1

1. बताइए कि निम्न में से कौन एकपदी हैं, कौन द्विपद हैं तथा कौन त्रिपद हैं। अन्य के नामों के लिए सुझाव दीजिए।
(नीचे की **टिप्पणी** देखिए)

(i) $4x-3y$ (ii) x^2

(iii) $4p^2q-4qp^2+r$ (iv) $3abc$

(v) $x+y+z+w$ (vi) $7-x+y$

(vii) $5x^3-2x+4$

*'द्वि,' '2' व्यक्त करता है, अतः **द्विपद** का अर्थ **है दो संख्याएँ**। 'त्रि', '3' व्यक्त करता है, अतः **त्रिपद** का अर्थ **है तीन संख्याएँ**। **एक पदी** का अर्थ है **एक संख्या**।

टिप्पणी : हम संख्याओं के वर्ग, घन और बड़ी घातों के संकेतन से पहले से ही परिचित हैं। चूंकि ये अक्षर भी संख्याएँ ही व्यक्त करते हैं, इसलिए इसी संकेतन को इन अक्षर संख्याओं के लिए भी सुविधाजनक रूप से प्रयोग किया जा सकता है।

अतः $x^2=x\times x$, $x^3=x\times x\times x$, इत्यादि।

2. निम्न में से कौन कौन समान पद हैं :
(i) $3x, -7x$ (ii) $11x, 11y$ (iii) $14xy, -21xy$ (iv) $15ab, -4b$

3. निम्न में से प्रत्येक व्यंजक में x का गुणांक लिखिए :
$-3xy$, $4x-3y$, $7-x+y$, mx, $17xyz$

7.2 बीजीय व्यंजकों का योग और व्यवकलन

अब हम यह जानते हैं कि किसी व्यंजक में समान और असमान पद हो सकते हैं। अत: बीजीय व्यंजकों को जोड़ने (या घटाने) के लिए हमें समान पद **संग्रहित** (*collect*) करके उन्हें **जोड़ (या घटा) लेना** चाहिए। अब हम समान पदों को किस प्रकार जोड़ते (या घटाते) हैं? उदाहरण के तौर पर $3x$ और $7x$ को लीजिए। मान लीजिए हम $3x+7x$ ज्ञात करना चाहते हैं। क्या हम इसे $3x+7x=(3+7)x$ नहीं लिख सकते ? हाँ ! क्यों ? क्या आपको याद है कि वितरण गुण क्या है ?

अत:, $3x+7x=(3+7)x=10x$

इसी प्रकार, $18xy-3xy+6xy=(18-3+6)xy=21xy$

अत: समान पदों को जोड़ने या घटाने का क्या नियम है ?

कई समान पदों का योग (या अंतर), एक अन्य समान पद होता है जिसका गुणांक इन समान पदों के योग (या अंतर) के बराबर होता है।

उदाहरण 1 : $3pq, -2pq$ तथा $-11pq$ को जोड़िए।

हल : इनका योग, एक अन्य समान पद होगा जिसका गुणांक $3-2-11=-10$ है। इस प्रकार,

$$3pq-2pq-11pq=-10pq$$

वैकल्पिक विधि : यदि हम उपर्युक्त नियम याद नहीं रखना चाहते तो हम वितरण गुण का प्रयोग करके लिख सकते हैं कि

$$3pq-2pq-11pq=(3-2-11)pq=-10pq$$

उदाहरण 2 : $8ab^2$ में से $24ab^2$ घटाइए।

हल : $8ab^2-24ab^2=(8-24)ab^2=-16ab^2$

उदाहरण 3 : समान पद संग्रहित कीजिए और व्यंजक
$-7x^2+3x+x^2-8-5x+9x^2-4$ को सरल कीजिए।

हल : हम पुनर्व्यवस्थित करके समान पदों को संग्रहित करते हैं। इससे हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$-7x^2+x^2+9x^2+3x-5x-8-4$$
$$=(-7+1+9)x^2+(3-5)\,x-12$$
$$=3x^2-2x-12$$

उदाहरण 4 : व्यंजकों $3x+4y-5z$, $5y+2x$, $7x-8y$ और $4x-9y-5z$ को जोड़िए।

हल : इन व्यंजकों को जोड़ने के लिए हमें इनके समान पदों को जोड़ने की आवश्यकता है। सुविधा

की दृष्टि से हम इन व्यंजकों को इस प्रकार लिखेंगे कि इनके समान पद एक स्तंभ* (*column*) में हों जैसा कि नीचे दिखाया गया है :

$$\begin{array}{l} 3x+4y-5z \\ 2x+5y \\ 7x-8y \\ 4x-9y-5z \\ \hline 16x-8y-10z \end{array}$$

उदाहरण 5 : $15xy+6yz+7zx$ में से $12xy-5yz-9zx$ को घटाइए।

हल : $15xy+6yz+7zx-(12xy-5yz-9zx)$

$=15xy-12xy+6yz-(-5yz)+7zx-(-9zx)$

$=(15-12)xy+[6-(-5)]yz+[7-(-9)]zx$

$=3xy+11yz+16zx$

[आपको याद होगा कि एक ऋणात्मक संख्या का ऋणात्मक, धनात्मक होता है, इसलिए $[6-(-5)]=6+5$ अर्थात् 11 होगा, इत्यादि। किसी धनात्मक संख्या का ऋणात्मक क्या होता है? अतः क्या हम यह नहीं कह सकते कि एक व्यंजक में से दूसरे को घटाने के लिए हम उस व्यंजक के, जो कि घटाया जाना है, प्रत्येक पद का चिन्ह बदलें ('+' से '−' या '−' से '+') और फिर दोनों व्यंजकों को जोड़ लें? हम उदाहरण 4 ही की तरह समान पदों को एक स्तंभ में रख लेंगे। **उस व्यंजक के जो कि घटाया जाना है प्रत्येक पद के चिन्ह परिवर्तन को मूल (*original*) चिन्ह के नीचे लिखकर दर्शाया जाता है।**]

अब हम इस विधि से $15xy+6yz+7zx$ में से $12xy-5yz-9zx$ को घटाते हैं।

$$\begin{array}{rrr} 15xy+ & 6yz+ & 7zx \\ 12xy- & 5yz- & 9zx \\ - & + & + \\ \hline 3xy+ & 11yz+ & 16zx \end{array}$$

उदाहरण 6 : $3x^2-8x+11$, $-2x^2+12x$ और $-4x^2+17$ के योग में से x^2-x-1 को घटाइए।

हल : हम व्यंजकों को इस प्रकार लिखते हैं कि इनके समान पद एक ही स्तंभ में रहें। निस्संदेह, हम अंतिम व्यंजक के प्रत्येक पद का चिन्ह बदल कर लिखेंगे। **क्यों ? अब हमें निम्न प्राप्त होता है :**

$$\begin{array}{rrr} 3x^2- & 8x+ & 11 \\ -2x^2+ & 12x & \\ -4x^2 & & +17 \\ x^2- & x- & 1 \\ - & + & + \\ \hline -4x^2+ & 5x+ & 29 \end{array}$$

*इसके लिए व्यंजकों में पदों के क्रम को यदि आवश्यक हो तो, बदला जा सकता है जैसा कि उपर्युक्त उदाहरण 4 में दूसरे व्यंजक में किया गया है।

प्रश्नावली 7.2

1. जोड़िए :
   (i) $7x^2y, -3x^2y, 14x^2y$
   (ii) $y^3, -2y^3, -3y^3, 4y^3$
   (iii) $-abc, 13abc, 5abc$
2. घटाकर सरल कीजिए :
   (i) $3y^2 - 18y^2$ (ii) $-12ab - 6ab$
   (iii) $23a^3 - 17a^3$
3. प्रत्येक व्यंजक को समान पद संग्रहित करके सरल कीजिए :
   (i) $-x^2 + 4x^2 - 8x^2 + 11x^2$
   (ii) $12b - 7b - 3b$
   (iii) $3x^2 + y + 7 - 6x^2 - 5y - 11 + 2y$
   (iv) $2b - 7a + 8a - 5b + 3c - c$
   (v) $10m^2 - 9m + 7m - 3m^2 - 5m - 8$
4. जोड़िए :
   (i) $3x + 4y - 15z,\ 6x + 7y,\ 12y - 7z - 9x$
   (ii) $x^2y - 3x + 4,\ -8x^2y + 3x - 4$
   (iii) $13x^3 - 7x^2,\ 10x^2 + 8x^3,\ -5x^3,\ 4x^2 - 3x^3$
   (iv) $15a + 11b - 13c - 17,\ 18 - 12c - 7b - 3a$
5. घटाइए :
   (i) $c^3 + 2a^3 - b^3 + abc$ में से $3abc - a^3 - b^3$
   (ii) $-2x^3 + 4xy - 5y^2$ में से $x^3 - 3xy - 2y^2$
   (iii) $3m^3 - 3mn + 8$ में से $-m^3 + 3mn$
6. $3a - 5b + 3c$ और $2a + 4b - 5c$ के योग में से $4a - b - c + 3$ को घटाइए।
7. $2x^2 + 3xy$ प्राप्त करने के लिए $x^2 + xy + y^2$ में क्या जोड़ना चाहिए?
8. $11x - 16y + 7a$ प्राप्त करने के लिए $-13x + 5y - 8a$ में से क्या घटाना चाहिए ?
9. $2x^2 + 3xy, -x^2 - xy + y^2$ और $xy + 2y^2$ के योग में से $3x^2 - y^2$ और $-x^2 + xy + y^2$ का योग घटाइए।
10. $6m - 7n - 5p, -4m + 6p - 9n$ और $5m - 4n + 3p$ के योग में से $13m - 11n + 9p$ और $-7p + 3m - 5n$ का योग घटाइए।

7.3 समूहन संकेतों का प्रयोग

बहुधा, यह आवश्यक हो जाता है कि दो या दो से अधिक पदों वाले व्यंजक को एक संख्या ही माना जाए। उदाहरणार्थ $2x$ को व्यंजक $3x - 5y$ से गुणा करने के लिए हमें व्यंजक $3x - 5y$ को एक ही

संख्या मानना चाहिए। ऐसे व्यंजकों को अलग दर्शाने के लिए समूहन संकेतों (*grouping symbols*) '(   )', '[   ]' और '{   }' का प्रयोग किया जाता है। इन संकेतों को क्रम से **छोटा कोष्ठक, बड़ा कोष्ठक** और **मंझला कोष्ठक** कहते हैं। अतः इनमें से किसी भी कोष्ठक में व्यंजक $3x-5y$ को रखकर तथा $2x\times(3x-5y)$ या केवल $2x(3x-5y)$ लिखकर हम $2x$ और $3x-5y$ का गुणन दर्शा सकते हैं।

इस प्रकार, व्यंजकों पर (बीजीय) संक्रियाएँ करते समय हमें समूहन संकेतों को लगाने या हटाने की आवश्यकता पड़ेगी।

उदाहरणार्थ, अंतर $(3x^2-2x+7)-(2x^2-4x-3)$ को ज्ञात करने के लिए, हम प्रत्येक व्यंजक में से पहले छोटे कोष्ठक हटाएंगे। पहले व्यंजक के कोष्ठक से पहले कौनसा चिन्ह है? धन चिन्ह। अतः हम कोष्ठक हटा देते है और पहले व्यंजक को बिना कुछ परिवर्तन किए लिख देते है। दूसरे व्यंजक के कोष्ठक के पहले कौनसा चिन्ह है? ऋण चिन्ह। निस्संदेह, इसका अर्थ है कि हमें दूसरे व्यंजक को पहले व्यंजक में से घटाना है। अतः हम कोष्ठक हटाकर दूसरे व्यंजक के प्रत्येक पद का चिन्ह परिवर्तित कर देते हैं। इस प्रकार हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(3x^2-2x+7)-(2x^2-4x-3)=3x^2-2x+7-2x^2+4x+3$$
$$=x^2+2x+10$$

अतः हम देखते हैं कि

(1) यदि किसी समूहन संकेत के पहले '+' चिन्ह लगा हो, तो इस संकेत को बिना पदों के चिन्ह में कोई परिवर्तन किए हटाया जा सकता है ;

(2) यदि किसी समूहन संकेत के पहले '−' चिन्ह लगा हो, तो प्रत्येक पद का चिन्ह परिवर्तित करके इस संकेत को हटाया जा सकता है ;

(3) यदि किसी व्यंजक में एक से अधिक समहन संकेत हों, तो हम सबसे अंदर वाले संकेत को पहले हटाते हैं और यदि कोई समान पद हों तो उन्हें संग्रहित करके जोड़ते हैं। हम यह प्रक्रिया बाहर की ओर तब तक जारी रखते हैं जब तक कि सब समूहन संकेत न हट जाएं।

उदाहरण 1 : $6a-(7b-c)$ को सरल कीजिए।

हल : हम नियम 2 का प्रयोग करते हैं और इस प्रकार हमे $6a-7b+c$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 2 : $[2x^2-\{3x-(7x^2+4x-2)\}]$ को सरल कीजिए।

हल : हम सबसे अंदर वाले संकेत से बाहर की ओर चलते हैं। **इस प्रकार**

$$[2x^2-\{3x-(7x^2+4x-2)\}]=[2x^2-\{3x-7x^2-4x+2\}]$$
$$=[2x^2-\{-x-7x^2+2\}]$$
$$=[2x^2+x+7x^2-2]$$
$$=9x^2+x-2$$

अब देखें कि हम व्यंजकों में समूहन संकेत किस प्रकार लगाते हैं? इसके लिए उपर्युक्त नियमों (1) और (2) जैसे नियमों का ही प्रयोग किया जाता है। **यदि कोई ऐसा समूहन संकेत लगाना हो जिसके पहले '+' चिन्ह हो तो हम व्यंजक में केवल वह संकेत लगा देते हैं।** इस स्थिति में हम व्यंजक के पदों के चिन्हों में कोई परिवर्तन नहीं करते। परन्तु, **यदि कोई ऐसा समूहन संकेत लगाना हो**

जिसके पहले '—' चिन्ह हो तो हम व्यंजक के प्रत्येक पद का चिन्ह परिवर्तित कर देते हैं और व्यंजक में '—' चिन्ह वाला संकेत लगा देते हैं।

उदाहरण 3 : व्यंजक $3a-4b-2c$ में ऐसा समूहन संकेत लगाइए जिसके पहले '—' चिन्ह लगा हो।

हल : हम तीनों कोष्ठकों में से किसी भी कोष्ठक का प्रयोग कर सकते हैं। आइए बड़े कोष्ठक का प्रयोग करें। हमें निम्न प्राप्त होता है।

$$3a-4b-2c=-[-3a+4b+2c]$$

उदाहरण 4 : व्यंजक $-a^2-8a+6b-3c+8d$ के अंतिम दो पदों को कोष्ठक में रखिए जिसके पहले ऋण चिन्ह लगा हो।

हल : हम देखते हैं कि

$$-a^2-8a+6b-3c+8d=-a^2-8a+6b-(3c-8d)$$

प्रश्नावली 7.3

1. सरल कीजिए :

(i) $(2x-3y)-(x+2y)$
(ii) $(-8l+3m)-(5l-11m)$
(iii) $(3a-5b)-(-6a+2b)$
(iv) $(x^2+3x-2)-(4x-2x^2-2)$
(v) $x+(x-y-3)-(2x+y-4)$
(vi) $2l-[l-(3m-2l)+m]$
(vii) $-x+[-(3x+2y)+(x-4)]$
(viii) $(3x^2-4y+3x)-[x^2-(x^2-y)-3y+4]$
(ix) $[4-2a+5b-(a-b)+3]-(5a+4b-3c)$
(x) $-\{5x^3+x^2-[3x^2-(1-2x-x^3)-3x^3]+1\}$
(xi) $6ab-\{-(2ab-4a)+[3b-(a+ab)+7ab]\}$
(xii) $-\{3x-4y-[-8y-6+3x+(2y-5x-3)-6]+3x-3y\}$

2. निम्न में से प्रत्येक व्यंजक के अंतिम दो पदों को कोष्ठक में रखिए जिसके पहले '—' चिन्ह लगा हो।

(i) $9x+6z-4y-8$
(ii) $2x^3+4y^3-3z+9$
(iii) $a-b-4d-5$

7.4 बीजीय व्यंजकों का गुणन

7.4.1 आइए पहले **दो या अधिक एक पदीयों को गुणा करें।** उदाहरणार्थ, मान लीजिए ये $2x$, $-3y$ और $4z$ हैं। चूँकि अक्षर संख्याएँ, संख्याएँ व्यक्त करती हैं अतः यह सरलता से देखा जा सकता है कि $(2x)(-3y)(4z) = 2 \times x \times (-3) \times y \times 4 \times z$

$$= 2 \times (-3) \times 4 \times x \times y \times z \text{ (क्यों ?)}$$
$$= -24xyz$$

अतः हम देखते हैं कि **दो या अधिक एक पदीयों का गुणनफल उनके गुणांकों के गुणनफल का अक्षर गुणनखंडों के साथ गुणनफल है।**

उदाहरण 1 : $12x$, -8, $3x^2y$ और $4y^3$ को गुणा कीजिए।

हल : नियम का प्रयोग करने पर, हमें निम्न गुणनफल प्राप्त होता है :

$$12 \times (-8) \times 3 \times 4 \times x \times x^2 \times y \times y^3$$
$$= -1152 \times x \times x^2 \times y \times y^3$$
$$= -1152x^3y^4 \text{ (नीचे टिप्पणी देखिए)}$$

7.4.2 अब आइए एक **द्विपद और एक पदी का गुणा करें।** उदाहरणार्थ, हम $2a$ और $4b + 3c$ लेते हैं।

हम गुणन का वितरण गुण प्रयोग कर सकते हैं। इस प्रकार हम लिखते हैं कि

$$2a(4b + 3c) = (2a)(4b) + (2a)(3c)$$
$$= 8ab + 6ac$$

उदाहरण 2 : $(-3x^2y)$ और $(x^2 + 4y^2)$ का गुणा कीजिए।

हल : $-3x^2y(x^2 + 4y^2)$

$$= -3x^2yx^2 - 12x^2yy^2 = -3x^4y - 12x^2y^3$$

हम एकपदी और त्रिपद का किसप्रकार गुणा करेंगे ? आइए निम्न उदाहरण लें।

उदाहरण 3 : $2x^2$ और $(-4x^2 + 4y^2 - xy)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : $2x^2(-4x^2 + 4y^2 - xy) = 2x^2(-4x^2) + 2x^2(4y^2) - 2x^2(xy)$

$$= -8x^4 + 8x^2y^2 - 2x^3y$$

क्या आप वह नियम बता सकते हैं जिसका हमने एकपदी और त्रिपद का गुणा करने में प्रयोग किया है ?

7.4.3 अंत में, आइए **दो द्विपदों को गुणा करें।** उदाहरणार्थ, हम $(3a - 2b)$ और $(5a - 4b)$ लेते हैं। यहाँ हमें गुणन के वितरण गुण का दो बार प्रयोग करना पड़ेगा। $(5a - 4b)$ को एक संख्या मानिए (आपको याद होगा कि समूहन संकेतों के प्रयोग से ऐसा हम कर सकते है) और तब,

$$(3a - 2b)(5a - 4b) = 3a(5a - 4b) - 2b(5a - 4b)$$
$$= 3a(5a) - 3a(4b) - 2b(5a) - 2b(-4b)$$
$$= 15a^2 - 12ab - 10ab + 8b^2$$
$$= 15a^2 - 22ab + 8b^2$$

टिप्पणी : $x \times x^2 = x \times x \times x = x^3$ इसी प्रकार, $y \times y^3 = y^4$

इसप्रकार हम देखते हैं कि **दो द्विपदों का गुणा करने के लिए हम एक द्विपद के पदों को क्रम से दूसरे द्विपद के पदों से गुणा करते हैं। और फिर इस परिणाम को जोड़ते (या घटाते) हैं।**

उदाहरण 4 : $(x+y)$ और $(x+y)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : हम, प्रत्यक्ष कारणों से, इस गुणनफल को $(x+y)^2$ लिखते हैं।

तब,

$$(x+y)^2 = x(x+y) + y(x+y)$$
$$= x^2 + 2xy + y^2$$

अत:, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

दूसरे शब्दों में, **किसी द्विपद का वर्ग पहले पद के वर्ग, दूसरे पद के वर्ग तथा दोनों पदों के गुणा के दुगुने के योग के बराबर होता है।**

$(x-y)^2$ कितना है? शब्दों में, $(x-y)$ और $(x-y)$ के गुणा करने का एक नियम बताइए।

उदाहरण 5 : $(3x+2y)^2$ ज्ञात कीजिए।

हल : नियम का प्रयोग कर हम लिख सकते हैं कि

$$(3x+2y)^2 = (3x)^2 + (2y)^2 + 2(3x)(2y)$$
$$= 9x^2 + 4y^2 + 12xy$$

उदाहरण 6 : $(a-3b^2)^2$ ज्ञात कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि

$$(a-3b^2)^2 = [a+(-3b^2)]^2$$
$$= (a)^2 + (-3b^2)^2 + 2(a)(-3b^2)$$
$$= a^2 + 9b^4 - 6ab^2$$

प्रश्नावली 7.4

1. गुणा कीजिए :

(i) $x^3(x^4)$

(ii) $x^2(x^3)$

(iii) $x^2y^3(x^3y^3)$

(iv) $x^5y(y^3)$

(v) $13(-4x^3y)$

(vi) $(-18a)(4bx)$

(vii) $(-6y)(-3y^2x)$

(viii) $(3a^2b)(-4a^2b^3)$

(ix) $(-3mn)(2m^2)(-n^3)$

(x) $(-3a^2b^2)(-6ab^4)(b^3)$
(xi) $(-2ab^2c)(3a^2bc)(-4ab^2c^2)(5abc^2)$

2. निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए :
(i) $-7x(2x-y)$
(ii) $ab(a^2-3b^2)$
(iii) $-b^2(2a^3-ab)$
(iv) $-8x^2y(4x-y^2)$
(v) $13x(x^2y+y^2x-3xy)$
(vi) $2b(a^2-2by+5y^2)$
(vii) $-4m^2n(3n+6mn-3)$
(viii) $-8x^3(2x^2-x^3-5+2x)$

3. निम्न गुणन कीजिए :
(i) $(3a-2)(a+5)$
(ii) $(m-3n)(2m+n)$
(iii) $(4a-3b)(3a+4b)$
(iv) $(2x^2+3)^2$
(v) $(2x^2-3)^2$
(vi) $(x^2+1)(x^2+2)$

4. निम्न व्यंजकों को सरल कीजिए :
(i) $2x(5y+2z)-3x(-y+2z)$
(ii) $2a(3a+7b)-6a^2-4ab$
(iii) $(a+b)^2-2ab$
(iv) $(a+b)^2-(a-b)^2$
(v) $(x+3y)(3x+y)-(3x^2+9xy-3y^2)$
(vi) $x^2+x(x+1)-x(x-1)$
(vii) $(a+b)^2-a^2$
(viii) $(a+b)^2-b^2$
(ix) $(a+2b)^2+a(a+b)-b(a+b)-ab$

7.5 व्यंजक का मान निकालना

इस एकक में कई स्थानों पर हमने कहा है कि अक्षर-संख्याएँ, संख्याएँ निरूपित करती है। अतः यदि कोई व्यंजक $2l+2b$ दिया हो तथा हमें l और b ज्ञात हों, तो हम $2l+2b$ का (संख्यात्मक) मान निकाल सकते हैं। यदि उपर्युक्त उदाहरण में l, 10 हो तथा b, 6 हो तो व्यंजक का मान $2(10)+2(6)$ अर्थात् 32 होगा। अक्षरों के स्थान पर उनके मान रखना **प्रतिस्थापन** (*substitution*) कहलाता है।

उदाहरण 1 : यदि $y=-2$ हो, तो $2y^3-3y^2+y-1$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम व्यंजक में $y=-2$, प्रतिस्थापित करते हैं जिससे हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$2(-2)^3-3(-2)^2+(-2)-1$$
$$=2(-2)(-2)(-2)-3(4)-2-1$$
$$=-16-12-2-1$$
$$=-31$$

प्रश्नावली 7.5

1. यदि $x=1, y=2$ तथा $z=-1$ हो तो निम्न व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए :

(i) x^2-y^2 (ii) z^2-x^2

(iii) $xy+yz-2$ (iv) $2xy^2-3x^2y+z^2$

(v) $y^2-z^2+x^2$ (vi) $4x^3+2y^3$

(vii) $(z+x)^2-2y$ (viii) $(x^3-y^2)(3y-2z)$

एकक VIII

समीकरणों का परिचय

इस एकक में हम देखेंगे कि कुछ ऐसी समस्याओं को, जिनमें ज्ञात और अज्ञात संख्याओं के परस्पर संबंध निहित हों, समीकरण के पदों में दुबारा व्यक्त करने में हम किस प्रकार अक्षर संख्याओं का प्रयोग कर सकते हैं। समीकरण की एक तुला (*balance*) से तुलना की गई है। समीकरणों को हल करने के नियम निकालने के लिए तुला का प्रोत्साहन (*motivation*) के रूप में प्रयोग किया गया है।

8.1 अज्ञात राशियाँ व्यक्त करने में अक्षरों का प्रयोग

हम संख्याएँ व्यक्त करने में अक्षरों का प्रयोग पहले ही कर चुके हैं। यहाँ हम इनका कुछ भिन्न संदर्भ में प्रयोग करेंगे। आइए निम्न उदाहरण को देखें।

उदाहरण 1 : एक दी हुई संख्या और उसके दुगुने का योग 162 है। वह संख्या क्या है?

यहाँ दी हुई संख्या **अज्ञात** है। हम सबसे पहले कुछ संख्याएँ लेकर जाँच करेंगे। आइए, उदाहरणार्थ, संख्या 10 लें। क्या 10 दी हुई संख्या हो सकती है? नहीं। $10+2(10)$ क्या है? आइए एक दूसरी संख्या, उदाहरणार्थ, 18 लें। क्या 18 दी हुई संख्या हो सकती है? नहीं। (क्यों?) हम अब भी 162 से बहुत अधिक दूर हैं। व्यावहारिक ज्ञान कहता है कि हम कोई बड़ी संख्या, उदाहरणार्थ, 50 लेकर जाँच करें। क्या 50 दी हुई संख्या हो सकती है? पुनः नहीं।

यदि हम संख्या ज्ञात भी कर लें (54 लेकर जाँच कीजिए) फिर भी प्रयत्न और भूल (*trial and error*) की इस प्रक्रिया में समय अधिक लगता है और यह अनावश्यक भी है जैसा कि आप देखेंगे, हम संख्या को सरलता और शीघ्रता से ज्ञात करने के लिए बीजगणित के साधनों का प्रयोग कर सकते हैं।

आइए, अज्ञात राशि अर्थात् दी हुई संख्या को एक अक्षर संख्या, मान लीजिए, x से व्यक्त करें अब हम दी हुई समस्या को गणित की भाषा में परिवर्तित कर सकते हैं। हम कहते हैं कि हमें ऐस x **ज्ञात करना है** जिससे कि

$$x+2x=162 \text{ या } 3x=162$$

उपर्युक्त **समीकरण** (*equation*) का एक उदाहरण है। x, समीकरण की **अज्ञात** (*unknown*) राशि कहलाती है। हम अज्ञात राशि को अक्षरों y या z या u, इत्यादि से भी व्यक्त कर सकते थे। इसके लिए हम अंग्रेजी वर्णमाला के बाद वाले अक्षरों को प्राथमिकता देते हैं।

हम देखते हैं कि

समानता का वह कथन जिसमें एक अज्ञात* राशि निहित हों प्रतिबन्धित समीकरण (*conditional equation*) या केवल **समीकरण** (*equation*) **कहलाता है।** एक समीकरण के दो **पक्ष** (*sides*) होते हैं। पहला वाम पक्ष (बाईं ओर वाला) तथा दूसरा, दक्षिण पक्ष (दाईं ओर वाला)। उपर्युक्त उदाहरण में हम देख सकते हैं कि $3x$ समीकरण $3x = 162$ का वाम पक्ष है तथा 162 दक्षिण पक्ष है। यदि किसी संख्या को समीकरण में अज्ञात के स्थान पर प्रतिस्थापित करने से वाम पक्ष और दक्षिण पक्ष बराबर हो जाएँ तो कहा जाता है कि वह संख्या समीकरण को संतुष्ट (*satisfy*) करती है। इस संख्या को समीकरण का एक **हल** (*solution*) या एक **मूल** (*root*) कहते हैं। समीकरण के मूल ज्ञात करने की विधि, समीकरण का **हल करना** (*solving*) कहलाती है।

गणितज्ञ, बहुत प्राचीन समय से ही ऐसी समस्याएँ जिन्हें समीकरण के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है प्रस्तावित तथा हल करके अपना मनोविनोद करते चले आए हैं। उदाहरणार्थ, लगभग 1800 ई० पू० में अहम्स (*Ahmes*) नामक एक मिस्रवासी ने निम्न समस्या प्रस्तावित तथा हल की :

एक संख्या और उसका दो तिहाई और उसका आधा और उसका सातवां भाग 37 के बराबर है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हिन्दू गणितज्ञों ने लगभग चौथी **शताब्दी** में विभिन्न प्रकार की समीकरणों में अज्ञातों का प्रयोग किया और उनको हल करने की विधियाँ ज्ञात कीं। हमें, उदाहरणार्थ, बारहवीं **शताब्दी** के एक हिन्दू गणितज्ञ भास्कराचार्य की कृति लीलावती में निम्न समस्या मिलती है।

"भँवरों के एक झुंड का पांचवा भाग खिले हुए कदम्ब पर जा बैठा, एक तिहाई शीलीन्ध्रि के फूल पर और इन संख्याओं के अंतर का तिगुना कुटज के बौर की ओर उड़ गया। शेष बचा हुआ एक भँवरा, चमेली और केतकी की मनमोहक सुगन्ध से प्रलोभित होकर हवा में इधर उधर मंडराता रहा। हे सुमुखी ! मुझे बताओ, भँवरों की कुल संख्या कितनी थी ?"

अहम्स और भास्कराचार्य---दोनों की समस्याएं इस पुस्तक की सीमा के बाहर है। हम इनके बारे में बाद में पढ़ेंगे।

अज्ञात राशियों को व्यक्त करने के लिए संकेतों के प्रयोग का श्रेय प्राचीन हिन्दू गणितज्ञों को दिया गया है। उन्होंने अज्ञातों के कई नाम जैसे कि यावत् तावत् (इसका अर्थ है इतना कि), वर्नी, बिजा, इत्यादि रखे और उन्हें व्यक्त करने के लिए रंगों के पहले अक्षर जैसे कि का, नी, पी, पा, या, इत्यादि का प्रयोग किया। लगभग 300 ई० पू० में ये अक्षर तथा इनकी घात और मूल ज्ञात करने की विधियाँ बहुत प्रचलित थीं।

सत्रहवीं **शताब्दी** में ही, एक फ्रांसीसी गणितज्ञ डेकारट्स (*Descartes*) [1596–1650] ने सबसे पहले अज्ञातों को व्यक्त करने के लिए अक्षरों $x, y, z,$ इत्यादि का और इनकी घातों के लिए संकेतों x^2, x^3 इत्यादि का प्रयोग किया।

---

*हम केवल एक अज्ञात राशि वाली समीकरणों का ही **अध्ययन करेंगे।**

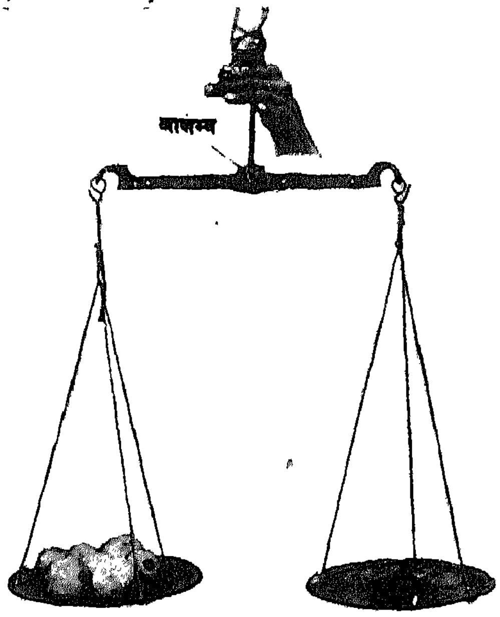
प्रश्नावली 8.1

1. प्रयत्न और भूल विधि से निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $x+8=13$ (ii) $y-2=2$
(iii) $2m=6$ (iv) $10-x=6$
(v) $y+3=7$ (vi) $z-1=-3$
(vii) $2x=9-x$

8.2 समीकरण हल करना

समीकरण को एक तुला से तुलना की जा सकती है। इसके दोनों पक्षों (*sides*) को दो पलड़े माना जा सकता है तथा समानता का संकेत '=' यह दर्शाता है कि दोनों पलड़े संतुलन की स्थिति में हैं। (देखिए आकृति 8.1)



आकृति 8.1

निश्चय ही, आपने तुला देखी होगी। हम तुला की स्थिति में बिना कोई परिवर्तन किए उसके पलड़ों में क्या क्या कर सकते हैं? हम उसके दोनों पलड़ों में बराबर राशियाँ जोड़ (और इसलिए

गुणा कर) सकते हैं या हम उसके दोनों पलड़ों में से बराबर राशियां घटा (और इसलिए भाग दे) सकते हैं और ऐसा करने पर तुला की स्थिति में कोई परिवर्तन नहीं आएगा अर्थात् दोनों पलड़े अपनी पहली स्थिति में ही रहेंगे। ठीक यही हम समीकरणों में करने जा रहे हैं। दूसरे शब्दों में, हम

(1) समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही संख्या जोड़ सकते है,

(2) समीकरण के दोनों पक्षों में से एक ही संख्या घटा सकते हैं,

(3) समीकरण के दोनों पक्षों को एक ही संख्या से गुणा कर सकते हैं, तथा

(4) समीकरण के दोनों पक्षों को एक ही संख्या से भाग दे सकते हैं।

अब हम इन नियमों का प्रयोग करेंगे और कुछ समीकरणों को हल करेंगे।

उदाहरण 1: $x-3=11$ को हल कीजिए।

हल: हम समीकरण के दोनों पक्षों में 3 जोड़ते हैं। (नियम 1)

इससे हमें निम्न प्राप्त होता है:

$x-3+3=11+3$

अर्थात्, $x=14$

[आइए $x=14$ को दी हुई समीकरण में प्रतिस्थापित करें। हम देखते हैं कि

वाम पक्ष $=14-3=11$

दक्षिण पक्ष $=11$

अर्थात् $x=14$ के लिए वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष है।]

इस प्रकार, $x=14$, दी हुई समीकरण का एक मूल (*root*) या हल (*solution*) है।

उदाहरण 2: $2y=y+3$ को हल कीजिए।

हल: हम समीकरण के दोनों पक्षों में से y घटाते हैं। (नियम 2)

इस प्रकार, $2y-y=y+3-y$

अर्थात $y=3$

[अब आइए दी हुई समीकरण में $y=3$ प्रतिस्थापित करें। हम देखते हैं कि

वाम पक्ष $=2(3)=6$

दक्षिण पक्ष $=3+3=6$

अर्थात् $y=3$ के लिए वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष है।]

इस प्रकार, $y=3$ दी हुई समीकरण का हल है।

उदाहरण 3: $10\div y=2$ को हल कीजिए।

हल: हम दी हुई समीकरण के दोनों पक्षों को y से गुणा करते हैं। (नियम 3)

इस प्रकार, $(10\div y)\times y=2y$

या $10=2y$

अब हमें $10=2y$ के दोनों पक्षों को 2 से भाग देना चाहिए। (नियम 4)

इस प्रकार, $10\div 2=(2y)\div 2$

अर्थात्, $y=5$

[आइए, $y=5$ को दी हुई समीकरण में प्रतिस्थापित करें। हम देखते हैं कि

वाम पक्ष $=10\div 5=2$

दक्षिण पक्ष $= 2$

अर्थात् $y = 5$ के लिए, वाम पक्ष $=$ दक्षिण पक्ष है।]

इस प्रकार, $y = 5$, दी हुई समीकरण का हल है।

हम देखते हैं कि समीकरण हल करने में हम उपर्युक्त चारों नियमों में से एक या अधिक का प्रयोग करते हैं और ऐसे चरण तक आने का प्रयत्न करते हैं जिसमें **स्वयं अज्ञात संख्या समीकरण के एक पक्ष के रूप में प्रकट हो जाए।**

प्रश्नावली 8.2

निम्न में से प्रत्येक समीकरण हल कीजिए और समीकरण में प्रतिस्थापित करके अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

1. $3x + 4 = 19$
2. $11x - 2 = 20$
3. $8y - 16 = 0$
4. $3x + 8 = 5x + 2$
5. $6y - 5 = 19$
6. $7 + 4y = -5$
7. $18 - 7x = -3$
8. $5y - 3 = 3y - 5$
9. $12 \div x = 6$
10. $100 \div z = 10$
11. $5y + 10 - 4y = -10$
12. $6m - 4 = 2m - 8$
13. $2y = 3(5 - y)$
14. $3(x - 3) = 5(2x + 1)$
15. $3x - 4 = 4 - (8 + 3x)$
16. $5x = 16(1 - 4x) + 4 + 17(2 + 3x)$
17. $6x - 9 - 2(1 - x) = x + 3$

8.3 समस्याएँ हल करने में समीकरणों का प्रयोग

अब हम देखेंगे कि ऐसी अनेक समस्याओं को जिनमें ज्ञात और अज्ञात संख्याओं के परस्पर संबंध निहित हों, पुनः समीकरणों के पदों में निरूपित किया जा सकता है। इन संबंधों का अधिकतर शब्दों में वर्णन किया जाता है और इसी कारण हम इन समस्याओं को **शाब्द समस्याएँ या प्रश्न** (*word problems*) कहते हैं। आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : दो संख्याओं का योग 52 है। इनमें से एक संख्या दूसरी से 10 अधिक है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : पहली दृष्टि में ऐसा लगता है कि इस प्रश्न में दो अज्ञातों की आवश्यकता है। परन्तु, जैसा कि हम देखेंगे कि, हम एक अज्ञात मानकर भी अपना लक्ष्य पूरा कर सकते हैं।

दूसरे वाक्य में कहा गया है कि एक संख्या, दूसरी से 10 अधिक है। इस प्रकार, यदि हम एक संख्या को x मानें तो दूसरी संख्या $x + 10$ होगी।

अब पहले वाक्य में कहा गया है कि इनका योग 52 है।

अतः $x+(x+10)=52$

इस प्रकार, हमने शाब्द प्रश्न को एक समीकरण के रूप में निरूपित कर दिया जिसे हम सरलता से हल कर सकते हैं। इस प्रकार,

$x+(x+10)=52$

या, $2x+10=52$

या, $2x+10-10=52-10$

या, $2x=42$

या, $x=21$

अतः दोनों संख्याएँ 21 और 31 है।

[हम देख सकते हैं कि इनका योग 52 है। साथ ही, 31, 21 से 10 अधिक है।]

उदाहरण 2 : सुरेश के पिता की आयु, सुरेश की दो वर्ष पहले की आयु की तिगुनी है। आज उन दोनों की आयु का योग 62 है। प्रत्येक की आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना दो वर्ष पहले सुरेश की आयु x वर्ष थी। तब, आज

सुरेश के पिता की आयु $3x$ वर्ष है

तथा सुरेश की आयु $(x+2)$ वर्ष है।

उनकी आयु का योग 62 है। दूसरे शब्दों में,

$3x+(x+2)=62$

इस प्रकार हमने **शाब्द प्रश्न** को एक समीकरण के रूप में निरूपित कर दिया जिसे सरलता से हल किया जा सकता है। इस प्रकार,

$3x+(x+2)=62$

या, $4x+2=62$

या, $4x=60$

या, $x=15$

अतः सुरेश की आयु 17 वर्ष है तथा उसके पिता की 45 वर्ष।

[हम देख सकते हैं कि $45+17=62$। साथ ही, 45, 15 का, जो कि 2 वर्ष पहले सुरेश की आयु थी, तिगुना है।]

उदाहरण 3 : एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई के दुगुने से 8 मीटर कम है। आयत का परिमाप 56 मीटर है। उसकी विमाएं (*dimensions*) अर्थात् लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

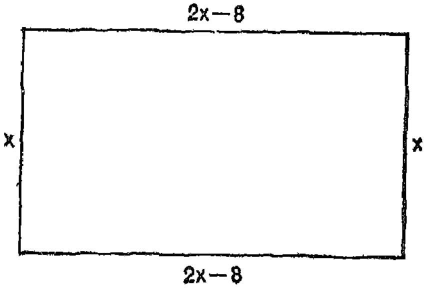
हल : चूंकि लम्बाई, चौड़ाई के पदों में दी हुई है, इसलिए हम अज्ञात चौड़ाई को x मीटर मान लेते हैं। (देखिये आकृति 8.2)

तब, लम्बाई $=(2x-8)$ मीटर (क्यों?)

अब, परिमाप $=(2x-8)+x+(2x-8)+x$

परन्तु, परिमाप 56 मीटर दिया है। अतः

$(2x-8)+x+(2x-8)+x=56$



आकृति 8.2

या, $6x-16=56$

या, $6x=72$

या, $x=12$

अतः, लम्बाई $=2(12)-8$ अर्थात् 16 मीटर

अतः आयत की विमाएं 16 मीटर और 12 मीटर है।

[हम देख सकते हैं कि 16 मीटर लम्बाई, चौड़ाई के दुगुने से 8 मीटर कम है। साथ ही परिमाप $=16+12+16+12$ अर्थात् 56 मीटर है।]

हम देखते हैं कि किस प्रकार तीन भिन्न प्रकारों के शाब्द प्रश्नों को समीकरणों के पदों में निरूपित करके हम उनका हल ज्ञात करने में समर्थ हो सके। इन प्रश्नों को समीकरणों के पदों में निरूपित करने की कोई निश्चित विधि नहीं है। परन्तु निम्न से कुछ उपयोगी संकेत अवश्य मिल सकते हैं :

1. प्रश्न को बार बार पढ़िए जब तक कि आप यह न समझ लें कि क्या दिया है और क्या ज्ञात करना है।
2. अज्ञात को किसी अक्षर x, या y या z इत्यादि से व्यक्त कीजिए।
3. (क) प्रश्न को धीरे धीरे, एक एक वाक्य अनुसार गणित की भाषा में परिवर्तित कीजिए।
   (ख) वह राशिएँ निर्धारित कीजिए जो कि बराबर हैं और उनसे एक समीकरण बनाइए।
4. अज्ञात के लिए, समीकरण को हल कीजिए।
5. जाँच कीजिए कि प्राप्त उत्तर प्रश्न में दिए हुए प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है या नहीं।

प्रश्नावली 8.3

1. किसी संख्या के दुगुने में 7 जोड़ने से 49 प्राप्त होता है। संख्या ज्ञात कीजिए।
2. किसी संख्या के तिगुने में से 22 घटाने पर 68 प्राप्त होता है। संख्या ज्ञात कीजिए।
3. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनमें से एक, दूसरी से 11 अधिक हो तथा इनका योग 53 हो।

4. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए कि जिनमें से एक, दूसरी की तिगुनी है तथा इनका अंतर 28 है।

5. तीन क्रमागत पूर्णांकों का योग 24 है। पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

6. एक आयत की लम्बाई, उसकी चौड़ाई से 4 मीटर अधिक है। आयत का परिमाप 84 मीटर है। उसकी विमाएं ज्ञात कीजिए।

7. एक आयत की लम्बाई, उसकी चौड़ाई की तिगुनी है। उसका परिमाप 96 मीटर है। उसकी लम्बाई ज्ञात कीजिए।

8. एक पर्स (*purse*) में जितने 25 पैसे के सिक्के हैं उससे दुगुने 10 पैसे के सिक्के हैं। यदि पर्स में इन दो प्रकार के सिक्कों में कुल 9.00 रु० हों तो प्रत्येक प्रकार के सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए।

9 .3000.00 रु० की एक लाटरी (*lottery*) में कुल 63 इनाम दिए जाते हैं। एक इनाम या तो 100.00 रु० का है या 25.00 रु० का। प्रत्येक प्रकार के इनाम की संख्या ज्ञात कीजिए।

10. 15 वर्ष बाद, शीला की आयु उसकी वर्तमान आयु की चौगुनी हो जाएगी। उसकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

विविध प्रश्नावली IV

(एकक VII और VIII पर)

1. जहाँ संभव हो वहाँ सरल कीजिए और बताइए कि निम्न में से कौन एक पदी, कौन द्विपद और कौन त्रिपद हैं ?

(i) -4

(ii) $3x^2-x+1$

(iii) xy^2-4y^2

(iv) $x^2-(x-y)$

(v) $x^2-(x^2+y)+4x$

2. निम्न में से प्रत्येक व्यंजक में x का गुणांक लिखिए :

(i) $(2-y)x$

(ii) y^2x-y

(iii) $7y^2-7xy$

*(iv) $4a^2x+2x$

3. निम्न को जोड़िए :

(i) $a+b-c,\ b+c-a,\ c+a-b$

(ii) $x^2-y^2-z^2,\ y^2-z^2-x^2,\ z^2-x^2-y^2$

(iii) $x-3xy,\ 3xy-y,\ y+1$

4. घटाइए :

(i) y^2x-x^2-z में से x^2-y^2x+z

(ii) $-a-b-c$ में से $a+b-c$

(iii) $-2x^2+4x+10$ में से $-2x+1$

5. दो द्विपदों का योग $4x-y$ है। यदि इनमें से एक $x-4y$ हो, तो दूसरा ज्ञात कीजिए।

6. सरल कीजिए :

(i) $3x^2-4xy+y^2-2x^2-2xy-4y^2-10x$

(ii) $xy^2-y^3+x^3+xy^2-4y^3-x^2-7$

7. एक मेज की लम्बाई, उसकी चौड़ाई की दुगुनी है। यदि चौड़ाई 'b' एकक हो, तो मेज की परिमाप ज्ञात कीजिए।

8. सरल कीजिए :

(i) $[(x^2-y^2)-(x^2+y^2)]-[-2x^2-(x^2-4y^2)]$

(ii) $[-a-(b-a)]-[-b-(a-b)]$

(iii) $[2b-a-b-\{2c-b+a-(a-b-c)\}]$

9. यदि $x=1$ और $y=2$ हो तो निम्न व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $x+y$

(ii) $x-3y+2$

(iii) $-4x+5y-7$

(iv) $x+4$

(v) $y-10$

10. यदि $x=0$ और $y=-1$ हो, तो निम्न के मान ज्ञात कीजिए :

(i) x^2-y+2

(ii) $x+y^2+8$

(iii) x^2+y^2

(iv) x^2y^2

(v) xy^3-x^2y+x

11. निम्न गुणन ज्ञात कीजिए :

(i) $x(x^5)$

(ii) $(x+1)x$

(iii) $(x-2)x$

(iv) $x^2(5-x)$

(v) $x^3(-1+x^2)$

12. सरल कीजिए :

(i) $(x-y)(x+y)$

(ii) $(x+y)(x+1)$

(iii) $(x-3y)(x-2y)$

(iv) $(y+2x)(y-x)$

13. निम्न में से प्रत्येक में x का गुणांक ज्ञात कीजिए :

(i) $(3x-2)-(4-x)$

(ii) $xy^2-(-3-3xy^2+4y^2)$

(iii) $[y-x-(x-y)]-[x-2y-(y-4x)]$

14. $3x-y+z$ और $-y-z$ के योग में से $3x-y-z$ घटाइए। इस परिणाम में x का गुणांक क्या है ?

15. गुणा कीजिए :

(i) $(a+b)$ और $(a+b)$, दिखाइए कि $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(ii) $(a-b)$ और $(a-b)$, दिखाइए कि $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

16. एक तख्ते की लम्बाई और चौड़ाई क्रमश : $(a+b)$ और $(a-b)$ एकक है। उसका परिमाप ज्ञात कीजिए :

17. दो व्यंजकों का योग $x^2-y^2-2xy-2x+y-7$ है। यदि इनमें से एक $2x^2+3y^2-7y+1$ हो, तो दूसरा ज्ञात कीजिए।

18. यदि $a=1$, $b=0$ और $c=-1$ हो तो निम्न व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(a^2-3ac+a-3)b-(a-b^2-2ab)$

(ii) $[2a^2-\{a^2-2c^2-b^2-(a+b+c)\}][c^2-2ab(b-a)]$

19. **(खेल के लिए एक प्रश्न)** यदि शब्द *mathematics* के अक्षर एक बीजीय व्यंजक के भाग हों तो हम इस शब्द को $m^2a^2t^2heics$ लिखते हैं। ऐसे संकेतन में,

(क) निम्न को किस प्रकार लिखेंगे ?

(i) *properties*

(ii) *commutativity*

(iii) *cancellation*

(ख) निम्न को कौन से (अर्थ पूर्ण) शब्दों को संक्षिप्त करने के लिए प्रयुक्त किया जा सकता है ?

(i) $p^2r^3o^3\,tin$ (ii) ad^2i^2ton (iii) sy^3m^2etr

20. निम्न समीकरणें हल कीजिए और दी हुई समीकरण में प्रतिस्थापित करके अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

(i) $2x-7=19$ (ii) $3x+10=37$

(iii) $9x+1=-8$ (iv) $17-x=3$

(v) $2x+1=x-3$ (vi) $3x+2=-6-x$

(vii) $3x-10-2\,[4x+1-3\,(x+2)]=0$

(viii) $4x+2-2[4-x-3(2x-1)]=-x-(1-2x)+6$

(ix) $8-x=2-x+\{2x-4-(x-1)\}$

21. एक संख्या अपने तिगुने से 50 कम है। संख्या ज्ञात कीजिए।

*22. राम, श्याम और जीवन एक परीक्षा में बैठते हैं। राम ने श्याम द्वारा प्राप्त अंकों के तिगुने से 80 अंक कम प्राप्त किए जबकि जीवन ने श्याम द्वारा प्राप्त अंकों के दुगुने से 30 अंक अधिक प्राप्त किए। यदि तीनों व्यक्तियों द्वारा प्राप्त अंकों का योग 550 हो, तो उनके अलग अलग अंक ज्ञात कीजिए।

23. तीन दिन में 830 किलोग्राम सेब बेचे गए। दूसरे दिन, पहले दिन से 30 किलोग्राम कम बिक्री हुई तथा तीसरे दिन, दूसरे दिन से दुगुनी बिक्री हुई। पहले दिन कितने किलोग्राम सेब बेचे गए ?

24. एक संख्या, दूसरी संख्या से सात गुनी है। यदि इन संख्याओं का अंतर 516 हो, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

25. एक त्रिभुज ABC का परिमाप 94 सेमी है। AB, BC से 15 से मी छोटी है तथा AC, AB से 22 से मी लम्बी है। भुजा BC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

*26. एक हवाई जहाज़ की चाल, एक कार की चाल से 16 गुनी है। साथ ही, यदि कार की चाल, हवाई जहाज़ की चाल से 750 किलो मीटर प्रतिघंटा कम हो तो कार द्वारा 6 घंटों में चली हुई दूरी ज्ञात कीजिए।

एकक IX

अनुपात, प्रतिशतता और उनके अनुप्रयोग

इस एकक में हम अनुपातों (*ratios*) और प्रतिशतता (*percentages*) की संकल्पनाओं का उल्लेख करेंगे तथा इनके कुछ विषयों जैसे कि लाभ और हानि, साधारण ब्याज (*simple interest*) और अन्य दैनिक जीवन से संबंधित समस्याओं में अनुप्रयोग (*applications*) देखेंगे।

9.1 अनुपात

एक परीक्षा में बिन्दु ने 20 अंक प्राप्त किए तथा उसकी सहेली कमल ने 10 अंक प्राप्त किए। हम इन संख्याओं की दो प्रकार से **तुलना** कर सकते हैं।

(i) हम कह सकते हैं कि बिंदु ने कमल से (20−10) अर्थात् 10 अंक अधिक प्राप्त किए। यह विधि **अंतर द्वारा तुलना** (*comparison by difference*) कहलाती है। साथ ही, इसको यह भी कहा जा सकता है कि कमल ने बिन्दु से 10 अंक कम प्राप्त किए।

(ii) हम यह भी कह सकते हैं कि बिन्दु ने कमल से दुगुने अंक प्राप्त किए। यहाँ हम 20 को 10 से विभाजित करते हैं तथा इस विधि को **विभाजन द्वारा तुलना** (*comparison by division*) कहते हैं।

जब हम एक संख्या से दूसरी संख्या को विभाजित करके, दो संख्याओं की तुलना करते हैं तो हम कहते हैं कि हमने दोनों संख्याओं का एक **अनुपात** (*ratio*) बना लिया है। इस प्रकार 20 और 10 का एक अनुपात $20 \div 10$ है, 25 और 20 का एक अनुपात $25 \div 20$ है।

हम अक्षरों का संख्याएँ व्यक्त करने में पहले ही प्रयोग कर चुके हैं। हम कह सकते हैं कि

यदि a और b दो संख्याएँ हो तो a का b से अनुपात $a \div b$ है तथा इसे $a:b$ लिखा जाता है। a और b, अनुपात के पद (*terms of the ratio*) **कहलाते हैं।**

प्रत्यक्ष है कि a पहला पद है तथा b दूसरा पद है। तब, स्पष्टतया b का a से अनुपात $b \div a$ है तथा इसे $b:a$ लिखा जाता है। निस्संदेह हमें यह नहीं भूलना चाहिए कि हम किसी संख्या को शून्य से विभाजित नहीं कर सकते।

हम प्राय: **अनुपात को उसके सरलतम रूप** (*simplest form*) **में, अर्थात् उस रूप में जिसमें पदों में 1 को छोड़कर कोई अन्य गुणनखंड उभयनिष्ठ न हो, व्यक्त करते हैं।**

अत: हम, उदाहरणार्थ, **50 के 40 से अनुपात** को 5 का 4 से अनुपात **लिख सकते** हैं तथा इसी प्रकार अनुपात 32:24 **को सरलतम 4:3 लिख सकते हैं।**

उदाहरण 1 : निम्न अनुपातों को सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $25 \div 40$ (ii) $27 : 9$

हल : (i) $25 \div 40 = 25 : 40$

परन्तु अनुपात के पदों में 5 उभयनिष्ठ है।

अत: प्रत्येक पद को 5 से भाग देने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$25 : 40 = 5 : 8 = 5 \div 8$

(ii) $27 : 9$

अब, 9 दोनों पदों सें उभयनिष्ठ है।

अत: $27 : 9 = 3 : 1$

यह स्पष्ट है कि 20 किलोग्राम और 5 किलोग्राम का अनुपात 4:1 है; 30 रु० और 60 रु० का अनुपात 1 : 2 है; परन्तु क्या इसका कोई अर्थ निकलेगा कि यदि हम, मान लीजिए, 40 पैसे और 2.00 रु० का अनुपात ज्ञात करें? नहीं! हम 2.00 रु० को 200 पैसे में बदलेंगे और फिर इनका अनुपात 40 : 200 या, सरलतम रूप में व्यक्त करते हुए, 1 : 5 ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 2 : 3 घंटे का 75 मिनट से अनुपात ज्ञात कीजिए। इसे सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए।

हल : 3 घंटे = 180 मिनट

अत:, वांछित अनुपात $= 180 : 75$

$= 12 : 5$

प्रश्नावली 9.1

1. निम्न को अनुपातों की भाषा में व्यक्त कीजिए :।

(i) चाय बनाने के लिए, 8 प्याले (*cups*) पानी के लिए, एक प्याला दूध की आवश्यकता है।

(ii) इस स्कूल में, चार कक्षाओं को पढ़ाने का कार्य, पाँच शिक्षकों को सौंपा गया है।

(iii) एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से दुगुनी है।

2. निम्न अनुपातों को दैनिक जीवन की भाषा में व्यक्त कीजिए :

(i) भारत में, गाँवों की संख्या का शहरों की संख्या से अनुपात 2000 : 1 है।

(ii) आक्सीजन (*oxygen*) और हाइड्रोजन (*hydrogen*) को, आयतन के अनुसार (*by volume*), 1 : 2 के अनुपात में मिलाने से पानी बनता है।

(iii) एक परीक्षा में उत्तीर्ण हुए विद्यार्थियों की संख्या का परीक्षा में बैठने वाले विद्यार्थियों की कुल संख्या से अनुपात 4 : 5 है।

(iv) हमारे शहर में, ताँगों की संख्या का टैक्सियों (*taxies*) की संख्या से अनुपात 4 : 1 है।

3. निम्न में से प्रत्येक अनुपात को उसके सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 4 : 12	(ii) 50:30	(iii) 340 : 510
(iv) 21 : 35	(v) 300 मी : 2 किमी	(vi) 75 सेमी : 1 मी
(vii) 3 किग्रा : 750 ग्रा	(viii) 75 पैसे : 3.00 रु०	(ix) 2 घंटे : 30 मिनट

4. एक खेत की लम्बाई और चौड़ाई क्रमश: 108 मीटर और 72 मीटर हैं। खेत की लम्बाई का उसकी चौड़ाई से अनुपात ज्ञात कीजिए।

5. किसी नक्शे (*map*) का स्केल प्राय: नक्शे के एक कोने पर वह अनुपात लिखकर जो कि 'नक्शे पर दूरी' का तदनुरूपी 'भूमि पर दूरी' से होता है, दर्शाया जाता है। यह अनुपात नक्शे का **प्रतिरूप भिन्न** (*Representative Fraction* या संक्षेप में R. F.) कहलाता है।

एक नक्शे का स्केल 1 : 100000 है। नक्शे पर 4 सेमी की दूरी वास्तव में कुल कितनी दूरी निरूपित करेगी? [**संकेत** : स्केल से हमें पता लगता है कि नक्शे पर 1 सेमी की दूरी वास्तव में 100000 सेमी की दूरी निरूपित करती है। आपको याद होगा कि 100 सेमी = 1 मी, 1000 मी = 1 किमी।]

6. एक फैक्टरी में बनी खराब पेंसिलों की संख्या का अच्छी पेंसिलों की संख्या से अनुपात 1 : 9 है। एक घंटे में एक मशीन 180 अच्छी पेंसिलें बनाती हैं। खराब पेंसिलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

7. एक अम्ल (*acid*) को हल्का (*dilute*) करने के लिए विद्यार्थियों से कहा गया कि वे अम्ल और पानी को, आयतन के अनुसार, 2 : 5 क अनुपात में मिलाएँ। यदि कोई विद्यार्थी 10 घन सेंटीमीटर अम्ल लेता है तो उसे उसमें कितना पानी मिलाना चाहिए?

8. एक दिन किसी कक्षा में अनुपस्थित लड़कों की संख्या का उपस्थित लड़कों की संख्या से अनुपात 2 : 17 था। यदि कक्षा में 34 लड़क उपस्थित थ तो बताइए कि उस दिन कितन लड़के अनुपस्थित थे?

9. किसी स्कूल में खेलकूद (*sports*) में भाग ले रहे विद्यार्थियों की संख्या का कुल विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात 5 : 16 है। यदि 250 विद्यार्थी खेलकूद में भाग ल रहे हों, तो स्कूल में कुल विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

9.2 समानुपात

मान लीजिए हम एक दुकान पर कोई कपड़ा खरीदने जाते हैं और मान लीजिए कपड़े का मूल्य 20.00 रुपये प्रति मीटर है। यदि हम 5 मीटर कपड़ा खरीदें तो हमें 100.00 रु० देने पड़ेंगे। यदि हम 8 मीटर कपड़ा खरीदें तो हमें 160.00 रु० देने पड़ेंगे।, अब 5 मीटर का 8 मीटर से क्या अनुपात है? यह 5 : 8 है। और 100.00 रु० का 160.00 रु० से क्या अनुपात है? यह 100 : 160 है अर्थात् सरलतम रूप में व्यक्त करने पर वह 5 : 8 है। इस प्रकार हम देखते है कि

$$5 : 8 = 100 : 160$$

दो अनुपातों की ऐसी समिका (*equality*) एक **समानुपात** (*proportion*) कहलाती है। हम कहते हैं कि संख्याएँ 5, 8, 100 और 160 समानुपात में (*proportion*) हैं।

उदाहरण 1 : क्या 30, 40, 45 और 60 समानुपात में है?

हल : हमें जाँच करनी है कि क्या 30 : 40 = 45 : 60 है? अब 30 : 40, 3 : 4 के बराबर हैं क्योंकि इस अनुपात के पदों में 10 एक उभयनिष्ठ गुणनखंड है।

इसी प्रकार, 45 : 60 = 3 : 4

अतः, 30, 40, 45 और 60 समानुपात में हैं।

संख्याओं के स्थान पर अक्षरों का प्रयोग करते हुए हम कहते हैं कि

यदि $a : b = c : d$ है, तो a, b, c और d समानुपात में हैं। a, b, c और d **समानुपात के पद** (*terms of the proportion*) कहलाते हैं। ये क्रमशः पहले, दूसरे, तीसरे और चौथे पद हैं। प्रत्यक्ष है कि a और d **सिरों के पद** (*extreme terms*) हैं तथा b और c **मध्य के पद** (*middle terms*) हैं।

उदाहरण 2 : जाँच कीजिए कि 75 : 60 = 20 : 16 तथा 60 : 16 = 75 : 20

हल : आइए प्रत्येक अनुपात को सरलतम रूप में परिवर्तित करें।

75 : 60 = 5 : 4। साथ ही, 20 : 16 = 5 : 4

अतः स्पष्ट है कि 75 : 60 = 20 : 16

अब, 60 : 16 = 15 : 4 तथा 75 : 20 = 15 : 4

इसलिए, पुनः 60 : 16 = 75 : 20

हम देखते हैं कि हम किसी समानुपात के पदों की स्थितियाँ इस प्रकार बदल सकते हैं कि हमें फिर बराबर अनुपात प्राप्त हो जाएँ। इस प्रकार हमें एक दूसरा समानुपात प्राप्त हो जाता है। वास्तव में, यदि कोई समानुपात दिया हुआ हो तो हम इस समानुपात के पदों से तीन और समानुपात बना सकते हैं।

उदाहरण 3 : यदि $a : b = c : d$ हो तो **सिद्ध कीजिए** कि

$$a : c = b : d$$

हल : चूंकि $a : b = c : d$ इस लिए $a \div b = c \div d$

समानुपात के दोनों पक्षों को bd से गुणा करने पर,

$$(a \div b) \times bd = (c \div d) \times bd$$

अर्थात् $ad = cb$

अब इस समिका के दोनों पक्षों को dc से भाग देने पर,

$$ad \div (dc) = cb \div (dc)$$

अर्थात् $a \div c = b \div d$

दूसरे शब्दों में,

$$a : c = b : d$$

[उदाहरण 2 में हमने चार विशेष संख्याएँ लेकर जो जाँच की थी उसे इस उदाहरण में किन्हीं भी चार संख्याओं के लिए सिद्ध कर दिया गया है।]

अब आइए हम संख्याओं 3, 15, 15, 75 को लें। क्या ये समानुपात में हैं? हम देखते हैं कि 3 : 15 = 1 : 5, साथ ही 15 : 75 = 1 : 5

इस प्रकार वास्तव में 3 : 15=15 : 75 है अर्थात् 3, 15, 15, 75 समानुपात में हैं। हम देखते हैं कि मध्य पद 15 दुबारा आ रहा है। इस स्थिति में हम कहते हैं कि **संख्याएँ** 3, 15, 75 **समानुपात में हैं।** दूसरे शब्दों में,

यदि $a:b=b:c$ **हो तो हम कहते हैं कि** a, b, c **समानुपात में हैं।** प्रत्यक्ष है कि a और c **सिरों के पद** है तथा b **मध्य पद** है :

अब हम समानुपातों के एक रोचक गुण का अध्ययन करेंगे। आइए निम्न उदाहरणों को लें :

(i) 1, 2, 3, 6 समानुपात में हैं।

(ii) 5, 6, 20, 24 समानुपात में हैं।

(iii) 15, 25, 30, 50 समानुपात में हैं।

(i) में 1 और 6 सिरों के पद हैं तथा 2 और 3 मध्य पद हैं। (ii) में 5 और 24 सिरों के पद हैं तथा 6 और 20 मध्य पद हैं। (iii) में 15 और 50 सिरों के पद हैं तथा 25 और 30 मध्य पद हैं।

प्रत्येक उदाहरण में सिरों के पदों का गुणनफल क्या है? मध्य पदों का गुणनफल क्या है? हम देखते हैं कि **एक समानुपात में सिरों के पदों का गुणनफल, मध्य पदों के गुणनफल के बराबर होता है।** दूसरे शब्दों में

यदि $a:b=c:d$ **हो, तो** $ad=bc$

[3, 15, 75 समानुपात में हैं। इसमें सिरों के पदों का गुणनफल क्या है? मध्य पद का वर्ग क्या है?]

उदाहरण 4 : किसी समानुपात के पहले तीन पद क्रमशः 25, 10 और 15 हैं। चौथा पद ज्ञात कीजिए।

हल : आइए अज्ञात चौथे पद को x से व्यक्त करें। तब, 25, 10, 15, x, समानुपात में हैं।

अब हम पहले बताए गए गुण कि सिरों के पदों का गुणनफल मध्य पदों के गुणनफल के बराबर होता है, का प्रयोग करते हैं।

इस प्रकार, $25x=150$

यह एक समीकरण है जिसे सरलता से हल किया जा सकता है। हम दोनों पक्षों को 25 से भाग देते हैं और इस प्रकार हमें $x=6$ प्राप्त होता है।

अतः समानुपात में चौथा पद 6 है।

[विद्यार्थी को चाहिए कि वह जाँच करे कि 25, 10, 15, 6 वास्तव में समानुपात में हैं। दूसरे शब्दों में, यह कि क्या 25 : 10=15 : 6 है?]

उदाहरण 5 : यदि 12, x, 8, 14 समानुपात में हो तो x ज्ञात कीजिए।

हल : समानुपात के लिए, निश्चय ही,

$$12\times 14=x\times 8$$

या $$168=8x$$

दोनों पक्षों को 8 से भाग देने पर, हमें $x=21$ प्राप्त होता है। [जाँच कीजिए कि क्या 12 : 21=8 : 14 है?]

प्रश्नावली 9.2

1. जाँच कीजिए कि निम्न में से प्रत्येक में सिरों के पदों का गुणनफल, मध्य पदों के गुणनफल के बराबर हैं :

(i) 35 : 15 = 14 : 6
(ii) 12 : 18 = 14 : 21
(iii) 4 : 8 = 8 : 16

2. क्या निम्न संख्याओं के समुच्चय समानुपात में हैं ?

(i) 24, 45, 18, 30
(ii) 5, 6, 20, 18
(iii) 49, 45, 14, 10
(iv) 100, 150, 50, 75
(v) 33, 44, 66, 88
(vi) 150, 200, 250, 300

3. (क) क्या 12 : 18 = 14 : 21 है ?
(ख) क्या 63 : 45 = 28 : 20 है ?

4. निम्न समानुपातों के पदों का ही प्रयोग करते हुए प्रत्येक के लिए कम से कम एक अन्य समानुपात लिखिए :

(i) 30 : 45 = 16 : 24
(ii) 15 : 45 = 45 : 135

5. यदि 6, 18, x, 15 समानुपात में हों, तो x ज्ञात कीजिए।

6. किसी समानुपात के दूसरे, तीसरे और चौथे पद क्रमशः 44, 6 और 8 हैं। पहला पद ज्ञात कीजिए।

7. एक स्कूल के पुस्तकालय (*library*) में भौतिकी (*physics*) की पुस्तकों की संख्या का गणित (*mathematics*) की पुस्तकों की संख्या से वही अनुपात है जो गणित की पुस्तकों की संख्या का रसायन (*chemistry*) की पुस्तकों की संख्या से अनुपात है। यदि वहाँ गणित की 480 पुस्तकें और रसायन की 640 पुस्तकें हों, तो भौतिकी की पुस्तकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

8. यदि $8 : 3 = 24 : x$ हो, तो x ज्ञात कीजिए।

9. यदि $y : 14 = 3 : (-2)$ हो, तो y ज्ञात कीजिए।

9.3 अनुक्रमानुपात

निश्चय ही आपने ऐसे कथन सुने होंगे कि 'जितना कोई व्यक्ति भारी होगा उतना ही अधिक उसको दिल का दौरा पड़ने की संभावना है', 'अधिक कमाओगे तो अधिक खर्च करोगे', 'जितना तुम अधिक कार्य करोगे उतनी ही अधिक देश की उन्नति होगी'। उपर्युक्त कथनों को निश्चित रूप से सदैव ठीक नहीं कहा जा सकता। परन्तु प्रत्येक कथन में दो राशियां संबद्ध हैं। ये हैं व्यक्ति का भार, दिल का दौरा पड़ने की संभावना; आय, व्यय; इत्यादि जो कि इस प्रकार आचरण करती हैं कि या तो ये साथ साथ बढ़ती हैं या साथ साथ घटती हैं।

आइए एक रेलगाड़ी पर विचार करें जो कि 50 किलोमीटर प्रतिघंटे की समान चाल से चली जा रही है। अब हम देखते हैं कि इस उदाहरण में दो राशियाँ समय और दूरी किस प्रकार संबंधित है। हमारे पास समय और दूरी की निम्न सारणी है :

घंटों में समय	1	2	3	4	5	6	7
किमी में दूरी	50	100	150	200	250	300	350

हम देखते हैं कि

(1) तय की गई किन्हीं दो दूरियों का अनुपात वही है, जो तदनुरूपी समयों का है।
उदाहरणार्थ, 50 : 100 = 1 : 2 या 50 : 250 = 1 : 5 या
150 : 350 = 3 : 7

(2) तय किए गए किलोमीटरों की संख्या और घंटों की संख्या का अनुपात सदैव समान रहता है।

(3) दोनों राशियाँ, दूरी और समय, एक साथ बढ़ती या घटती हैं। दूसरे शब्दों में, ये एक एक साथ परिवर्तित होती हैं।

हम कहते हैं कि दोनों राशियाँ दूरी और समय **अनुक्रमानुपाती** (*vary directly*) हैं या यह कि ये **अनुक्रमानुपात** में (*indirect variation*) हैं। हम कभी कभी यह भी कहते हैं कि तय की गई दूरी समय के **अनुक्रमानुपाती** है या यह कि दूरी का समय से **अनुक्रमानुपात** (*direct proportion*) है। इस प्रकार, **दो राशियां x और y अनुक्रमानुपात में कहलाती हैं यदि x और y के तदनुरूपी मानों के लिए अनुपात $x:y$ एक ही रहें।** हम यह भी कहते हैं कि x, y **के अनुक्रमानुपाती** है या यह कि x का y से **अनुक्रमानुपात** है। हम इसे $x = Ky$ लिखते हैं जबकि यहाँ K **समानुपातकता स्थिरांक** (*constant of proportionality*) है। एक दिए प्रश्न के लिए, हम K का मान, प्रश्न में दिए हुए ब्यौरे से ज्ञात कर सकते हैं। जैसा कि नीचे उदाहरण 1 में दिखाया जा रहा है।

उदाहरण 1 : एक तार के टुकड़े से बहने वाली धारा (*current*), सिरों के विभावांतर (*potential difference*) के अनुक्रमानुपाती है। यदि विभावांतर 120 वोल्ट (*volts*) है तो धारा 6 ऐम्पियर (*amperes*) है। 10 ऐम्पियर की धारा के लिए कितने विभावांतर की आवश्यकता होगी ?

हल : माना c ऐम्पियर में धारा व्यक्त करता है तथा p, वोल्ट में विभवांतर। साथ ही, माना K समानुपातकता स्थिरांक है। तब, प्रश्न के पहले वाक्य के अनुसार $c = Kp$। दूसरे वाक्य में यह ब्यौरा किया है कि जब $p = 120$ वोल्ट है तो $c = 6$ ऐम्पियर है। इस ब्यौरे से हमें K ज्ञात करने में सहायता मिलती है। इस प्रकार,

$$6 = K \times 120$$

या, $K = 6 \div 120$

अतः अब c और p के संबंध को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$c = (6 \div 120)p$$

हमें p ज्ञात करना है जबकि $c=10$ दिया हुआ है।
इस प्रकार, $10=(6\div 120)p$
या, $p=200$ वोल्ट

प्रश्नावली 9.3

1. नीचे दी हुई सारणी में हाइड्रोजन गैस से भरे एक गुब्बारे द्वारा हवा में चढ़ी गई ऊँचाइयाँ और इन ऊँचाइयों तक पहुँचने में लिए गए समय दिखाए गए हैं। यह मानते हुए कि ऊँचाई, समय के अनुक्रमानुपाती है, '*' के स्थानों पर उपयुक्त संख्याएं भरिए।

समय (मिनट में)	2	3	*	25	*
ऊँचाई (मीटर में)	*	36	84	*	1860

2. टेरीकोट के 3 मीटर कपड़े का मूल्य 78·00 रु० है। एक ऐसी सारणी बनाइए जिसमें से 4 मीटर, 7 मीटर, 15 मीटर और 20 मीटर कपड़े के मूल्य पढ़े जा सकें। मान लीजिए कि मूल्य, लम्बाई के अनुक्रमानुपाती हैं।

3. यदि 4 व्यक्तियों के एक परिवार में एक मास में 52 किलोग्राम अनाज की खपत (*consumption*) होती है, तो 3, 5, 6 और 10 सदस्यों के परिवार में क्रमशः अनाज की कितनी मात्रा की आवश्यकता होगी? मान लीजिए कि अनाज की खपत परिवार के साइज (*size*) के अनुक्रमानुपाती है।

4. x, y के अनुक्रमानुपाती है तथा जब $y=4$ हो तो $x=12$ हो जाता है। जब $y=-2$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

5. एक पर्यटकों (*tourists*) की कार 3 घंटे में 135 किलोमीटर की समान चाल से हैदराबाद से बम्बई (600 किमी की दूरी) की ओर जा रही है। कुल चली गई दूरी और लिए गए समय का अनुपात ज्ञात कीजिए। कार को 360 किलोमीटर की दूरी तय करने में कितना समय लगेगा? कार 2 घंटे में कितनी दूरी तय करेगी?

6. पुस्तकों को एक पंक्ति में व्यवस्थित करने पर ज्ञात हुआ कि 50 पुस्तकें एक 2 मीटर लम्बी शैल्फ (*shelf*) में आ पाती है। ऐसी 450 पुस्तकों रखने के लिए कितनी लम्बाई की आवश्यकता होगी?

7. किंग हैनरी अष्टम् (*8th*) के 6 पत्नियाँ थीं। हैनरी चतुर्थ (*4th*) के कितनी पत्नियां थीं? (पता लगाइए!)

9.4 व्युत्क्रमानुपात

पुन: आपने ऐसे कथन सुने होंगे जैसे कि 'जितनी चाल तेज होगी एक दी हुई दूरी तय करने में उतना ही कम समय लगेगा', 'जितना मूल्य ज्यादा होगा, उतनी ही माँग कम होगी', इत्यादि। इन सब कथनों को भी प्रत्येक स्थिति में निश्चित रूप से ठीक नहीं कहा जा सकता। परन्तु प्रत्येक कथन में दो राशियां संबद्ध हैं जैसे कि चाल, समय; मूल्य, माँग; इत्यादि। ये राशियां इस प्रकार आचरण करती हैं कि यदि एक बढ़ती है तो दूसरी घटती है या यदि एक घटती है तो दूसरी बढ़ती है।

मान लीजिए कि गोपाल के पास कुर्सियां खरीदने के लिए 300.00 रु० है। आइए देखें कि इस उदाहरण में दो राशियां कुर्सियों की संख्या और मूल्य किस प्रकार संबंधित हैं। हम मूल्यों और कुर्सियों की संख्या की निम्न सारणी बना सकते हैं :

एक कुर्सी का मूल्य (रुपयों में)	25	30	50	60	75	100
कुर्सियों की संख्या	12	10	6	5	4	3

हम देखते हैं कि जैसे जैसे एक कुर्सी का मूल्य बढ़ता है, गोपाल द्वारा कुर्सियां खरीद सकने की संख्या इस प्रकार घटती जाती है कि दोनों संख्याओं (कुर्सियों की संख्या और एक कुर्सी का रुपयों में मूल्य) का गुणनफल सदैव 300 अर्थात् एक ही रहता है।

हम कहते हैं कि ये राशियां **व्युत्क्रमानुपात में** (*in inverse proportion*) हैं या यह कि एक राशि, दूसरी के **व्युत्क्रमानुपाती** (*varies inversely*) है।

यदि दो राशियां x और y इस प्रकार संबंधित हों कि उनका गुणनफल सदैव समान रहे तो इनमें से प्रत्येक राशि, दूसरी के व्युत्क्रमानुपाती कही जाती है। हम इसे $xy=K$ लिखते हैं जबकि पुनः K **समानुपातकता स्थिरांक** है। एक दिए हुए प्रश्न के लिए हम K का मान प्रश्न में दिए हुए ब्यौरे से ज्ञात कर सकते हैं जैसा नीचे उदाहरण 1 में दिखाया गया है :

उदाहरण 1 : जब $y=2$ तो $x=5$ है तथा x, y के व्युत्क्रमानुपाती है। जब $x=1$ हो, तो y का मान ज्ञात कीजिए।

हल : x, y के व्युत्क्रमानुपाती है, अत:

$$xy=K$$

प्रश्न के ब्यौरे के अनुसार, जब $y=2$, तो $x=5$ इस प्रकार,

$$5(2)=K$$

अर्थात् $K=10$

अत: हम उपर्युक्त संबंध को

$xy=10$ लिख सकते हैं।

अब जब $x=1$ हो तो यह सरलता से ज्ञात किया जा सकता है कि $y=10$

प्रश्नावली 9.4

1. निम्न सारणियों में '*' के स्थान पर उपयुक्त संख्या भरिए जबकि प्रत्येक में x, y के व्युत्क्रमानुपाती है।

(i)

x	36	72	*	*
y	48	*	16	12

(ii)

x	50	75	*	150	*
y	300	*	150	*	75

2. x, y के व्युत्क्रमानुपाती है तथा जब $y=240$ तो $x=12$ है।

(i) जब $x=36$ हो तो y ज्ञात कीजिए।

(ii) जब $y=48$ हो तो x ज्ञात कीजिए।

3. यदि 40 किलोमीटर प्रति घंटा की चाल से एक नियत दूरी को तय करने में 7 घंटे लगते हैं तो उस दूरी को 5 घंटे में तय करने के लिए हमें किस चाल से चलना चाहिए ?

4. एक विद्यार्थी अपने जेब खर्च में से 12 हास्य पुस्तिकाएं, जिनमें से प्रत्येक का मूल्य 2.00 रु० है, खरीदने के लिए पर्याप्त धन राशि बचा लेता है। अब वह इनके स्थान पर कुछ उपन्यास खरीदने का निश्चय करता है। यदि प्रत्येक उपन्यास का मूल्य 3.00 रु० हो तो वह कितने उपन्यास खरीद सकता है ?

5. एक ठेकेदार यह अनुमान लगाता है कि वह किसी काम को 7 आदमियों की सहायता से 6 दिन में पूरा कर सकता है। बाद में उसे ज्ञात होता है कि उसे इस काम के लिए 3 आदमी ही मिल सकते हैं। अब उसे इस काम को पूरा करने के लिए कितने दिन लगेंगे?

6. 5 आदमी एक मेड़ अर्थात्. चहारदीवारी 14 दिन में बना सकते हैं। यदि इस काम के लिए 7 आदमी नियुक्त किए गए हों तो ज्ञात कीजिए कि चहारदीवारी कितने दिन में बन जाएगी?

7. 6 नल एक टंकी को 2 घंटे में खाली कर सकते हैं। यह ज्ञात होता है कि इनमें से 4 नल खराब पड़े हैं। शेष बचे हुए 2 नलों को टंकी खाली करने में कितना समय लगेगा ?

8. भौतिकी में हम पढ़ेंगे कि खींची गई डोरी की कम्पन आवृत्ति (*vibration frequency*) उसकी लम्बाई के व्युत्क्रमानुपाती है। 100 सेमी लम्बी एक डोरी को खींचने से उसमें 240 कम्पन प्रति सेकन्ड की आवृत्ति होती है। यह मानते हुए कि प्रत्येक दशा में डोरी को खींचने के लिए एक सा बल लगाया जाता है, ज्ञात कीजिए कि

(i) इसी प्रकार की 80 सेमी लम्बी डोरी की कितनी आवृत्ति होगी ?

(ii) 400 कम्पन प्रति सेकन्ड की आवृत्ति के लिए इस प्रकार की कितनी लम्बी डोरी की आवश्यकता होगी ?

9.5 प्रतिशतता

मनी ने अपनी अर्धवार्षिक परीक्षा में विभिन्न विषयों में निम्न अंक प्राप्त किए :

	अंग्रेजी	पंजाबी	गणित	भौतिक विज्ञान	सामाजिक विज्ञान
अधिकतम अंक	50	100	150	90	80
प्राप्तांक	35	82	90	72	76

क्या हम देखकर यह बता सकते हैं कि मनी ने किस विषय में सबसे अच्छे अंक प्राप्त किए तथा किस विषय में सबसे खराब अंक प्राप्त किए ? नहीं!

आइए प्रत्येक विषय में प्राप्तांक का अधिकतम अंक से अनुपात लिखें। अब हमें 7 : 10, 41 : 50, 3 : 5, 4 : 5 तथा 19 : 20 प्राप्त होता है। क्या अब देखकर मनी के विभिन्न विषयों के पारस्परिक कार्यों के बारे में कुछ कहना संभव है। पुनः , नहीं !

आइए अब प्रत्येक अनुपात को थोड़ा दूसरे रूप में लिखें। हम 7 : 10 को 70 : 100, 41 : 50 को 82 : 100, 3 : 5 को 60 : 100, 4 : 5 को 80 : 100, 19 : 20 को 95 : 100 लिखते हैं। यह देखकर ही सरलता से बताया जा सकता है कि मनी ने सामाजिक विज्ञान में सबसे अच्छा काम किया, गणित में सबसे खराब काम किया; तथा यह कि उसका दूसरा अच्छा कार्य पंजाबी में था।

अतः हम देखते हैं कि यदि कई अनुपातों का दूसरा पद 100 हो तो इनकी बड़ी सरलता से तुलना की जा सकती है। **वह अनुपात जिसका दूसरा पद 100 हो, प्रतिशतता कहलाता है। हम, उदाहरणार्थ, 70 : 100 को 70 प्रतिशत* (*per cent*) या 70% लिखते हैं।**

इस प्रकार 15% = 15 : 100 या 3 : 20।

उदाहरण 1 : निम्न प्रतिशतों को सरलतम रूप के अनुपातों में व्यक्त कीजिए :

(i) 48% (ii) 105%

हल : (i) 48% = 48 : 100 अर्थात् 12 : 25

(ii) 105% = 105 : 100 अर्थात् 21 : 20

उदाहरण 2 : निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

(i) 50 रु० का 12% (ii) 10 मीटर का 30%

हल : (i) 50 रु० का 12% = (12 : 100) × 50 रु०

= (12 ÷ 100) × 50 रु० = 6 रु०

(ii) 10 मी का 30% = (30 ÷ 100) × 10 मी

= 3 मीटर

*शब्द 'पर सेंट' लेकिन भाषा के शब्द 'पर सेंटम' (*percentum*) का संक्षिप्त रूप है जिसका अर्थ है प्रति सैकड़ा। प्रतिशत व्यक्त करने के लिये संकेत '%' का प्रयोग किया जाता है।

प्रश्नावली 9.5

1. निम्न प्रतिशतों को सरलतम रूप के अनुपातों में व्यक्त कीजिए :
(i) 20% (ii) 30% (iii) 24%
(iv) 95% (v) 150%

2. निम्न का मान ज्ञात कीजिए :
(i) 700 रु० का 20%
(ii) 800 का 75%
(iii) 200 गैलन का 35%
(iv) 20 मीटर का 120%
(v) 70 का 30%

3. अपने माल को निकालने के लिये एक दुकानदार 5% की छूट की घोषणा करता है। 40.00 रु० के माल पर कुल छूट ज्ञात कीजिए।

4. एक बीमा ऐजेन्ट जितना प्रारम्भिक प्रीमियम इकट्ठा करता है उस पर उसे 8% का कमीशन मिलता है। यदि उसने एक छः मास के काल में 4500 रु० इकट्ठा किए तो उसका कमीशन ज्ञात कीजिए।

5. एक स्कूल में सन् 1975 की अपेक्षा 1976 में विद्यार्थियों की संख्या 12% बढ़ गई। 1975 में स्कूल में कुल 1400 विद्यार्थी थे। बताइए कि 1976 में कितने विद्यार्थी हैं ?

*6. एक आदमी 25000 रु० छोड़कर मरता है। इसका 30% दान में तथा शेष उसके दो बच्चों में समान रूप से बांट दिया जाता है। दान में तथा उसके प्रत्येक बच्चे को दी जाने वाली धन राशियां ज्ञात कीजिए।

7. सन् 1971 की जनगणनानुसार, भारत के 2640 शहरों में से 5% की जनसंख्या कम से कम 1 लाख थी। ऐसे शहरों की संख्या ज्ञात कीजिए। 96

8. किसी वर्ष विशेष में वैज्ञानिक अनुसंधान (*scientific research*) के 300 करोड़ रुपयों के कुल बजट में से (लगभग) 36 करोड़ रुपये परमाणु ऊर्जा विभाग (*Atomic Energy Department*) को दिए गए। दी गई इस धन राशि को वैज्ञानिक अनुसंधान के कुल बजट के प्रतिशत के रूप में व्यक्त कीजिए।

9.6 लाभ और हानि

दुकानदार या तो सीधा निर्माता (*manufacturer*) से या फिर किसी ठोक विक्रेता (*whole-saler*) की मार्फत माल खरीदता है। वह इस माल का कुछ मूल्य देता है। इस मूल्य को उसका **क्रय मूल्य** (*cost price*) कहते हैं। फिर वह इस माल को ग्राहक को बेचता है। वह जिस मूल्य पर माल बेचता है वह उसका **विक्रय मूल्य** (*selling price*) कहलाता है।

यदि विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य से अधिक हो तो दुकानदार को लाभ (*profit*) होता है, परन्तु यदि विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य से कम हो तो दुकानदार को हानि (*loss*) होती है।

दूसरे शब्दों में,

लाभ = विक्रय मूल्य − क्रय मूल्य

हानि = क्रय मूल्य − विक्रय मूल्य

लाभ या हानि प्रायः क्रय मूल्य के प्रतिशत रूप में व्यक्त की जाती है। उदाहरणार्थ, यदि कोई दुकानदार 10.00 रु० में एक पुस्तक खरीदकर उसे 12.00 रु० में बेचे तो वह 10.00 रु० लगाकर 2.00 रु० का लाभ प्राप्त कर लेगा। अतः क्रय मूल्य के प्रतिशत के रूप में यह लाभ $(2 \div 10) \times 100\%$ अर्थात् 20% है। आइए कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 1: एक दुकानदार ने एक रेडियो सेट, जिसका क्रय मूल्य 500.00 रु० था, 550.00 रु० में बेचा। क्रय मूल्य के प्रतिशत के रूप में उसका लाभ ज्ञात कीजिए।

हल: लाभ = विक्रय मूल्य − क्रय मूल्य = 50.00 रु०

अतः उसने 500.00 रु० के क्रय मूल्य पर 50 रु० का लाभ प्राप्त किया।

क्रय मूल्य के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करने पर, यह लाभ $(50 \div 500) \times 100\%$ अर्थात् 10% है।

दूसरे शब्दों में, दुकानदार ने 10% का लाभ प्राप्त किया।

उदाहरण 2: एक पुस्तक विक्रेता ने एक पुस्तक की 400 प्रतियां 20% के लाभ पर बेचीं। यदि उसे एक पुस्तक की लागत 10.00 रु० आई हो, तो 400 प्रतियों का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: लाभ = 10.00 रु० का 20%

$= (20 \div 100) \times 10.00$ रु०

$= 2.00$ रु०

इस प्रकार, विक्रय मूल्य = 10.00 रु० + 2.00 रु० = 12.00 रु०

अतः 400 प्रतियों का विक्रय मूल्य = (12.00 रु०) × 400

= 4800.00 रु०

दूसरे शब्दों में, पुस्तक विक्रेता ने 400 प्रतियां 4800.00 रु० में बेची।

उदाहरण 3: एक मेज 20% के लाभ पर 480.00 रु० में बेची गई। मेज का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: माना रुपयों में मेज का क्रय मूल्य x है।

तब $480 = x + x$ का 20%

या, $480 = x + (20 \div 100) \times x$

अर्थात्, $480 = x + (1 \div 5)\, x$

दोनों पक्षों को 5 से गुणा करने पर,

$480 \times 5 = 5x + 5\,(1 \div 5)\, x$

या, $2400 = 5x + x = 6x$

इस प्रकार, $x = 400$

दूसरे शब्दों में, मेज का क्रय मूल्य 400.00 रु० था।

प्रश्नावली 9.6

1. एक फल विक्रेता ने एक फलों की टोकरी, जिसकी लागत 200.00 रु० थीं, 5%के लाभ पर बेची। उसका विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

2. एक पुस्तक की 100 प्रतियाँ, जिनमें से प्रत्येक का मूल्य 8.00 रु० है, 864.00 रु० में बेची जाती हैं। उन पर लाभ या हानि ज्ञात कीजिए और उसे क्रय मूल्य के प्रतिशत के रूप में व्यक्त कीजिए।

3. एक व्यापारी ने एक पुरानी टाइप की मशीन 1000.00 रु० में खरीदी। उसने, उसकी मरम्मत पर 200.00 रु० व्यय किए और फिर उसे 10% के लाभ पर बेच दिया। टाइप की मशीन का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
[**संकेत :** मरम्मत भी लागत का ही भाग है।]

4. एक कपड़ा विक्रेता ने 20 साड़ियाँ 1120.00 रु० में बेची और इस प्रकार 12% का लाभ प्राप्त किया। प्रत्येक साड़ी का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

5. एक दुकानदार ने कुछ माल 6% के लाभ पर 4240.00 रु० में बेचा। उसका कुल लाभ ज्ञात कीजिए।

6. कोई फर्नीचर 1320.00 रु० में बेचा गया। दुकानदार ने बताया कि उसने इस पर 10% का लाभ प्राप्त किया है। फर्नीचर का क्रय मूल्य कितना है?

*7. एक स्वर्णकार ने थोक विक्रेता से 100 ग्राम सोना 5400.00 रु० में खरीदा जिससे थोक विक्रेता को 8% का लाभ हुआ। फिर स्वर्णकार ने यह सोना 10% के लाभ पर बेच दिया। ज्ञात कीजिए :

(i) प्रति 10 ग्राम, स्वर्णकार का विक्रय मूल्य।

(ii) स्वर्णकार और थोक विक्रेता के क्रमशः प्रति 10 ग्राम विक्रय मूल्य और क्रय मूल्य का अंतर।

8. एक व्यक्ति ने एक भूमिखंड 15% के लाभ पर बेचा। यदि कुल लाभ 4500.00 रु० हो, तो भूमिखंड का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

9.7 साधारण ब्याज

जब हम, मान लीजिए, किसी बैंक से रुपया उधार लेते हैं तो हम निर्दिष्ट अवधि के बाद न केवल उधार लिया हुआ रुपया ही वापिस करते हैं बल्कि बैंक के रूपयों का प्रयोग करने के बदले में कुछ **अतिरिक्त धन राशि** भी देते हैं। जो रुपया हम उधार लेते हैं वह **मूलधन** (*principal*) कहलाता है। जो अतिरिक्त धन राशि दी जाती है वह **ब्याज** (*interest*) कहलाती है और यह **एक वार्षिक दर प्रतिशत** (*rate per cent per annum*) जैसे कि 5% वार्षिक, के आधार पर दी जाती है। इसका अर्थ है कि एक वर्ष के लिए उधार लिए गए मूलधन 100 रु० पर ब्याज मूलधन का 5% अर्थात् 5.00 रु० होगा। **निर्दिष्ट** अवधि के बाद हम जो कुल रुपया वापिस करते हैं वह **मिश्रधन** (*amount*) कहलाता है। हम देखते हैं कि उपर्युक्त उदाहरण में मिश्रधन 105.00 रु० है। स्पष्ट है कि

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

अर्थात् $A = p + I$

अब, हम I किस प्रकार ज्ञात करते हैं ?

आइए (ब्याज की) दर को r से तथा वर्षों में समय (रुपया उधार लेनी की अवधि) को t से व्यक्त करें। तब, 1 वर्ष के लिए $I = pr$, अतः t वर्षों के लिए I, prt होगा। इस प्रकार, हमें I ज्ञात करने के लिए एक सूत्र (*formula*) $I = prt$ प्राप्त हो जाता है।

अब हम उपर्युक्त सूत्रों का कुछ उदाहरणों में प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 1 : 1000.00 रु० का 5% की दर से 3 वर्ष का ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $p = 1000.00$ रु०, $r = 5\% = (5 \div 100)$ $t = 3$, $I = ?$

इस प्रकार, $I = (1000) \times (5 \div 100) \times 3$ अर्थात् 150.00 रु०

उदाहरण 2 : 3000.00 रु० के मूलधन पर एक वर्ष का 240.00 रु० ब्याज दिया गया। ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $p = 3000$ रु०, $I = 240$ रु०, $t = 1$, $r = ?$

माना ब्याज की दर r, $x\%$ वार्षिक है।

तब, $240 = 3000 \times (x \div 100)$

अर्थात् $x = 8$ (क्यों ?)

अतः $r = 8\%$

उदाहरण 3 : यदि 10% वार्षिक की दर से एक वर्ष का ब्याज 400.00 रु० हो, तो मूलधन ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $p = ?$ $I = 400.00$ रु०, $r = 10\% = (10 \div 100)$, $t = 1$

इस प्रकार, $400 = p(10 \div 100)$

अतः $p = 4000.00$ रु०

प्रश्नावली 9.7

1. 500.00 रु० का एक ऋण (*loan*) एक वर्ष बाद वापिस कर दिया जाता है। यदि ब्याज की दर 5% वार्षिक हो तो मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

2. 6% वार्षिक ब्याज की दर से लगाई हुई 1200.00 रु० की धन राशि का वार्षिक ब्याज ज्ञात कीजिए। 5 वर्ष का कितना ब्याज होगा ?

3. किसी व्यक्ति ने एक स्कूल को 1500.00 रु० दान में दिए जिसके ब्याज से प्रतिवर्ष समान मूल्य के चार पुरस्कार दिये जाते हैं। यदि इस दान पर 12% वार्षिक ब्याज मिलता हो तो प्रत्येक पुरस्कार का मूल्य ज्ञात कीजिए।

4. 2000.00 रु० का एक ऋण 10% वार्षिक की दर से लिया जाता है। 3 वर्ष बाद कितने रुपये वापिस करने पड़ेंगे ?

[**संकेत :** पहले वार्षिक ब्याज ज्ञात कीजिए।]

5. एक कंपनी अपने यहाँ जमा धन राशि पर, जबकि यह जमा न्यूनतम 5 वर्ष के लिए हो, 14% ब्याज देती है। 2500.00 रु० की जमा धन राशि पर वार्षिक ब्याज ज्ञात कीजिए। यदि कोई व्यक्ति 2500.00 रु०, 7 वर्ष के लिए जमा कराए तो उसे कितना मिश्रधन मिलेगा ?

6. 3500.00 रु० के ऋण पर ब्याज दर ज्ञात कीजिए जबकि एक वर्ष बाद मिश्रधन 3850.00 रु० हो जाता है।

एकक—X

तल में आपतन गुण

10.1 भूमिका :

बिंदु (*points*), रेखाएँ (*lines*) और तल (*planes*) ज्यामिति के आधारभूत अवयव हैं। आप पिछली कक्षाओं में इनके विषय में पढ़ चुके हैं। इस एकक में हम इस प्रकार के प्रश्नों पर विचार करेंगे जैसे कि : एक दिए हुए बिंदु से होकर कितनी रेखाएं खींची जा सकती हैं? दो दिए हुए बिंदुओं से होकर कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं? दो दी हुई रेखाओं में कितने बिंदु उभयनिष्ठ (*common*) हैं? इन प्रश्नों के उत्तर देने में हमें बिंदुओं और रेखाओं में जो सम्बन्ध प्राप्त होते हैं, वे **तल में आपतन गुण** (*Incidence properties in the plane*), कहलाते हैं।

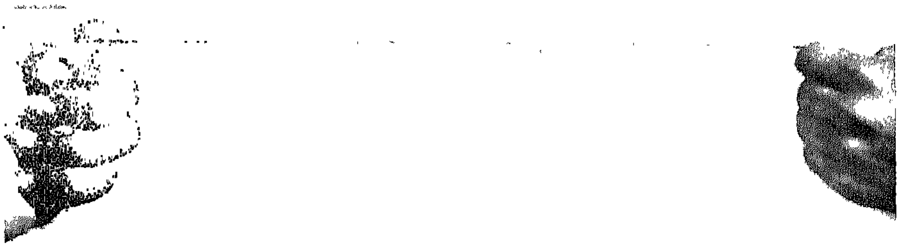
आइए पहले तल, रेखाओं और बिंदुओं की कुछ महत्वपूर्ण विशेषताओं का पुनरावलोकन करें।

10.2 तल, रेखाएं और बिंदु

10.2.1 **तल की मुख्य कल्पना यह है कि यह एक सपाट (*flat*) सतह है जो सभी दिशाओं में असीमित रूप से विस्तृत है।** किसी मेज की ऊपरी सतह, कागज का सपाट पन्ना इत्यादि तलों के कुछ उदाहरण हैं। कमरे का फर्श, निश्चल अवस्था में तालाब में पानी की ऊपरी सतह आदि तलों के अन्य उदाहरण हैं। इनमें से प्रत्येक उदाहरण में यह कल्पना की जाती है कि सतह असीमित रूप से विस्तृत है। साथ ही, **तल की लम्बाई और चौड़ाई तो होती है परन्तु कोई मोटाई नहीं होती।** क्योंकि कोई भी तल असीमित रूप से विस्तृत होता है, अत: किसी आकृति में पूर्ण तल को दिखाना संभव नहीं है। और इसी कारण हम किसी तल को उसका एक सीमित भाग जैसे आयत या समांतर चतुर्भुज, आदि खींचकर दर्शाते हैं। तल को उस पर स्थित तीन या अधिक बिंदुओं द्वारा नामांकित किया जाता है जैसे कि ABC अथवा $ABCD$।

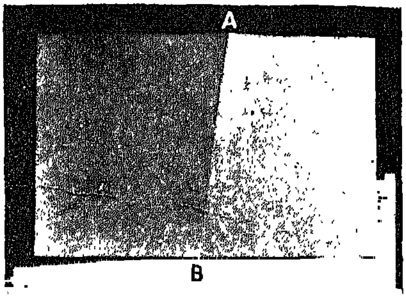
10.2.2 **रेखा में मुख्य कल्पना है उसका सीधापन (*straightness*) तथा यह कि उसका लम्बाई के अनुदिश दोनों दिशाओं में असीमित रूप से विस्तार है।**

रेखा की केवल लम्बाई होती है परन्तु उसकी न तो कोई चौड़ाई होती है और न ही मोटाई। दो व्यक्तियों द्वारा सिरों से पकड़कर, कसकर खींची गई कोई पतली डोरी (देखिए आकृति 10.1) रेखा के एक (सीमित) भाग का उदाहरण है।



आकृति 10.1: रेखा के उदाहरण के रूप में तनी हुई डोरी

आइए, एक कागज़ का पन्ना लें और उसे मोड़कर दोनों भागों को परस्पर दबाएं। कागज़ पर मोड़ का निशान (*crease*) पड़ जाता है। यदि अब हम कागज़ को खोल दें तो हमें यह मोड़ का निशान दिखाई देता है।(देखिए आकृति 10.2) यह रेखा के भाग का एक अन्य उदाहरण है।



आकृति 10.2 रेखा का उदाहरण

चूंकि रेखा की लम्बाई असीमित है, हम इसे किसी आकृति में पूर्णतया नहीं दिखा सकते। इसलिए हम रेखा को इसका एक सीमित भाग खींचकर दर्शाते हैं। जैसा कि आकृति 10.3 में दिखाया गया है।



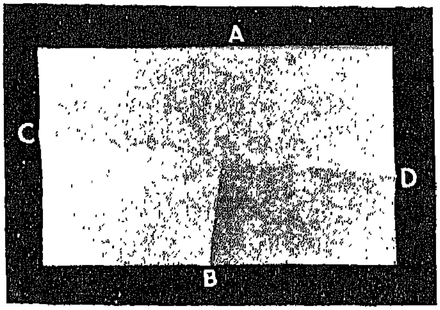
आकृति 10.3 रेखा AB

रेखा को उस पर कोई भी दो बिंदु लेकर या एक छोटे अक्षर द्वारा नामांकित किया जाता है जैसे कि AB, l या m

10.2.3 बिंदु में मुख्य कल्पना यह है कि न तो इसकी कोई लम्बाई होती है, न कोई चौड़ाई और न ही कोई मोटाई। बिंदु को एक बड़े अक्षर जैसे कि A या B या P इत्यादि द्वारा नामांकित किया जाता है किसी नुकीली पेंसिल से कागज पर बनाया गया चिन्ह, किसी पिन से कागज में किया गया छेद, आदि बिंदुओं के उदाहरण हैं।

यदि हम किसी कागज के पन्ने को मोड़कर दोनों भागों को परस्पर दबा दें तो एक मोड़ का निशान बन जाता है। मान लीजिए यह AB है।

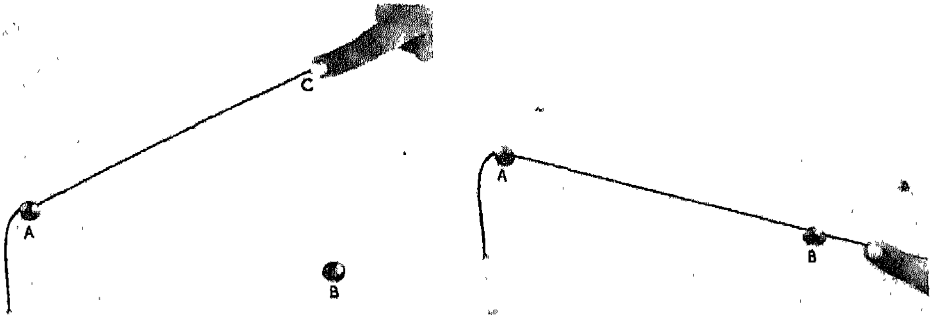
अब यदि हम पहले मोड़ के निशान की विपरीत अवस्था में एक दूसरा मोड़ का निशान बनाएँ तो दोनों मोड़ के निशान एक दूसरे को माना P पर काटते हैं (देखिए आकृति 10.4)। P, बिंदु का एक अन्य उदाहरण है।



आकृति 10.4 बिंदु का चित्र

10.3 पहला आपतन गुण

आइए, एक दीवार के तल में दो नुकली कीलें ठोकें अथवा एक ड्राइंग बोर्ड पर दो ड्राइंग पिन लगाएँ। माना इन कीलों (पिनों) के पाद A और B पर है। हम यह मान लेते हैं कि A और B दीवार अथवा ड्राइंगबोर्ड के तल में दो बिंदु निरूपित करते हैं। आइए, अब, एक पतली डोरी लें और उसके एक सिरे को A पर स्थित कील (अथवा पिन) से बाँध दें। अब हम डोरी को तल के जितने समीप संभव हो सके रखते हैं और किसी एक दिशा में खींचते हैं। माना यह दिशा AC है। [देखिए आकृति 10.5 (i)]

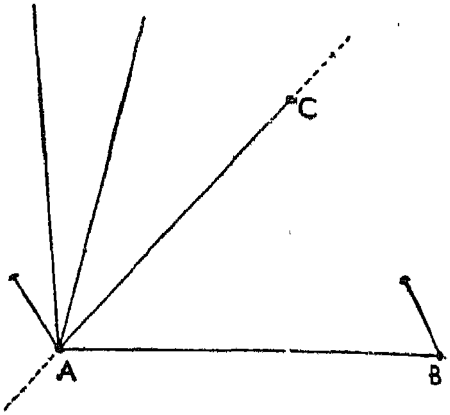


(i) (ii)

आकृति 10.5

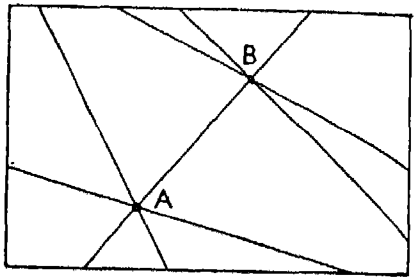
आइए कल्पना करें कि डोरी का दोनों दिशाओं में असीमित विस्तार है जैसा कि आकृति 10.5 (iii) में बिंदुकित चिन्हों द्वारा दर्शाया गया है। तब यह एक रेखा निरूपित करती है जिसमें बिंदु A अंतर्निहित है अर्थात, जो बिंदु A से होकर जाती है। स्पष्ट है कि डोरी की ऐसी कितनी भी स्थितियां हो सकती हैं। अतः **हम बिंदु A से होकर कितनी भी रेखाएँ खींच सकते हैं।**

अब हम डोरी को तना हुआ रखते हुए उसे A पर स्थित कील के चारों ओर तब तक घुमाते हैं जब तक कि वह B पर स्थित कील को न स्पर्श कर ले देखिए आकृति 10.5 (ii)]। डोरी की ऐसी कितनी स्थितियाँ संभव हैं? स्पष्ट है कि केवल एक स्थिति संभव है। आइए डोरी को B पर बांधकर इस प्रयोग को दोहराएँ। हम डोरी को तना हुआ रखते हुए B के चारों ओर तब तक घुमाते हैं जब तक कि वह A को स्पर्श न कर ले। हमें पुनः डोरी की एक ही ऐसी स्थिति प्राप्त होती है। वास्तव में, A और B के बीच में डोरी का तना हुआ भाग दोनों दशाओं में एक ही स्थिति धारण करता है। यह दोनों बिंदुओं A और B से होकर जाने वाली एक रेखा निरूपित करता है। अतः हम अपने प्रयोग से देखते हैं कि **दो बिंदुओं से होकर एक और केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।**



आकृति 10.5 (iii)

पुनः आइए एक क़ागज़ के पन्ने पर उसके तल में दो बिंदु निरूपित करने के लिए दो चिन्ह A और B अंकित करें। आइए अब कागज को इस प्रकार मोड़ें कि मोड़ का निशान A से होकर जाए। ऐसे हम कितने मोड़ के निशान बना सकते हैं? स्पष्ट है हम जितने चाहें उतने मोड़ के निशान बना सकते हैं। इसी प्रकार, हम B से होकर भी जितने चाहें उतने मोड़ के निशान बना सकते हैं। इनमें से कितने मोड़ के निशान A और B दोनों से होकर जाते हैं? स्पष्ट है, एक और केवल एक (देखिए आकृति 10.6)। चूंकि हमने कागज में जितने भी मोड़ के निशान बनाएँ हैं वे सभी A या B से होकर जानेवाली रेखाएँ निरूपित करते है, अतः हम **पुनः देखते हैं कि दो बिंदुओं A और B से होकर एक और केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।**



आकृति 10.6

उपर्युक्त दोनों ही प्रयोगों में हम देखते हैं कि दो बिंदुओं से होकर जाने वाली रेखा उस तल में पूर्णतया स्थित है जिसमें कि दोनों बिंदु स्थित है।

संक्षेप में, हमने देखा कि किसी तल में स्थित दो भिन्न बिंदुओं से होकर ठीक (*exactly*) एक रेखा खींची जा सकती है। यह रेखा पूर्णतया तल में स्थित होती है। हम इसे **आपतन का पहला गुण** (*First Incidence Property*) कहते हैं।

इसी गुण के कारण हम किसी रेखा को, जैसा कि हम अनुच्छेद 10.2.2 में पहले ही बता चुके हैं उस पर स्थित कोई भी दो बिंदु (उदाहरणार्थ, A और B) लेकर नामांकित कर सकते हैं।

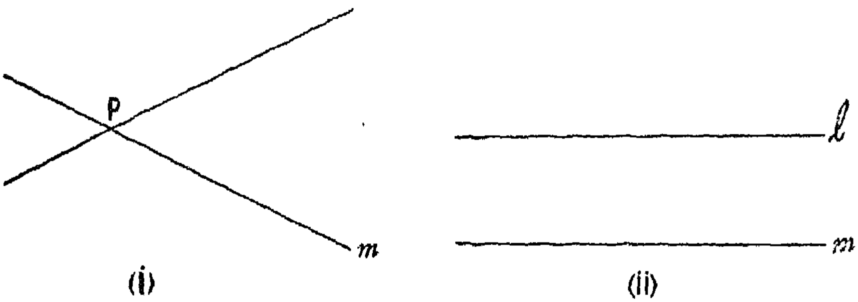
व्यावहारिक रूप में हम दो बिंदुओं A और B से होकर रेखा निम्न प्रकार खींच सकते हैं; हम कागज़ पर दो बिंदु A और B अंकित कर लेते हैं और फिर कागज़ पर एक सीधे किनारे वाला रूलर (*straight edged ruler*) इस प्रकार रखते हैं कि दोनों चिन्ह उसके किनारे के अनुदिश स्थित हों। इसके बाद एक नुकीली पेंसिल को रूलर के किनारे के सहारे सहारे चलाकर हम कागज़ पर रेखा खींच लेते हैं। हम इस रेखा को AB से नामांकित कर सकते हैं।

10.4 दूसरा आपतन गुण

आइए, पुन: एक कागज का पन्ना लें और इसमें एक बार मोड़ का निशान बनाने के बाद कागज़ को खोलकर दूसरा मोड़ का निशान बनाएं और कागज को खोल लें। ये मोड़ के निशान कागज़ के तल में दो रेखाएं निरूपित करते हैं। मान लीजिए ये l और m हैं। आइए हम यह भी कल्पना करें कि इन मोड़ क निशानों का उनकी लम्बाइयों के अनुदिश दोनों दिशाओं में असीमित विस्तार हो सकता है। तब दो स्थितियां हो सकतीं हैं। या तो मोड़ के निशान

(i) परस्पर काटते हैं [दिखिए आकृति 10.7 (i)] या

(ii) कभी नहीं काटते [दिखिए आकृति 10.7 (ii)]



आकृति 10.7

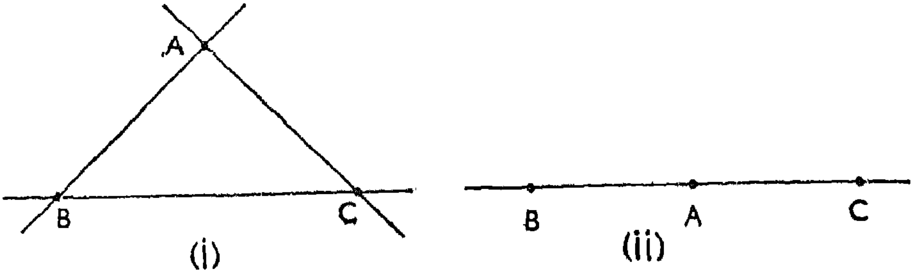
(i) में मान लीजिए कि मोड़ के निशान अर्थात् रेखाएं l और m बिंदु P पर काटते हैं। तब P, l और m दोनों में उभयनिष्ठ है। हम कहते हैं कि l और m एक बिंदु P पर **प्रतिच्छेद** (*intersect*) करती हैं। बिंदु P दोनों रेखाओं का **प्रतिच्छेद बिंदु** (*point of intersection*) कहलाता है।

(ii) में हम कहते हैं कि रेखाएँ **समांतर** (*parallel*) हैं। इस प्रकार, हम देखते हैं कि **किसी तल में दो रेखाएँ या तो ठीक एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है या वे समांतर होती है।** हम इसे **आपतन का दूसरा गुण** (*Second Incidence property*) कहते हैं।

10.5 संरेखी बिंदु

हम यह देख चुके हैं कि यदि A किसी तल में स्थित कोई बिंदु हो तो तल में A से होकर जितनी चाहें उतनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं। साथ ही, यदि A और B तल में स्थित कोई दो बिंदु हों तो (आपतन के पहले गुण द्वारा) A और B से होकर ठीक एक रेखा खींची जा सकती है और यह रेखा पूर्णतया तल में स्थित होती है।

अब यदि हमें तल में तीन बिंदु A, B और C दिए हों तो क्या होगा? व्यापक रूप में अब तीन रेखाएँ होंगी। पहली, बिंदु युग्म B, C से होकर, दूसरी, बिंदु युग्म C, A से होकर और तीसरी, बिंदु युग्म A, B से होकर [देखिए आकृति 10.8(i)]। परन्तु यह भी हो सकता है कि बिंदु A, रेखा BC पर

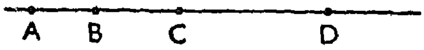


आकृति 10.8

स्थित हो जिससे कि तीनों रेखाओं की केवल एक ही रेखा रह जाए [देखिए आकृति 10.8 (ii)]। ऐसे तीनों बिंदु संरेखी (*collinear*) कहलाते हैं।

यदि एक ही तल में स्थित तीन या अधिक बिंदु एक ही रेखा पर स्थित हों तो वे संरेखी कहलाते हैं।

आकृति 10.9 में बिंदु A, B, C और D एक ही रेखा पर स्थित हैं। अतः ये संरेखी हैं।

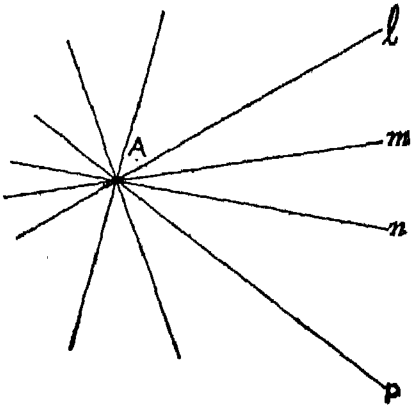


आकृति 10.9

10.6 संगामी रेखाएँ

आकृति 10.10 में रेखाएँ $l, m, n, p, \ldots$ एक ही बिंदु A से होकर जाती हैं। ऐसी रेखाएँ **संगामी रेखाएँ** (*concurrent lines*) कहलाती हैं और हम कहते हैं कि वे A **पर संगामी** (*concurrent at A*) हैं।

किसी तल में यदि तीन या अधिक रेखाएँ एक ही बिंदु से होकर जाएं तो वे संगामी कहलाती हैं।



आकृति 10.10

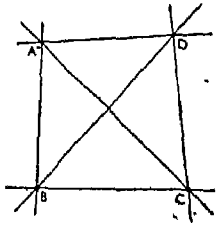
प्रश्नावली 10.1

1. एक दिए हुए बिंदु से होकर आप कितनी रेखाएँ खींच सकते हैं?

2. दो दिए हुए बिंदुओं से होकर आप कितनी रेखाएँ खींच सकते हैं?

3. आप तीन दिए हुए बिंदुओं में से दो दो बिंदु एक साथ लेकर कितनी रेखाएँ खींच सकते हो जब कि तीनों बिंदु (i) संगामी हैं, (ii) असंगामी (*non-collinear*) हैं।

4. किसी तल में A, B, C और D कोई चार बिंदु हैं। उनको दो दो के युग्मों में जोड़िए जैसा कि आकृति 10.11 में दिखाया गया है। ऐसी कितनी रेखाएँ हैं? उनके नाम लिखिए।

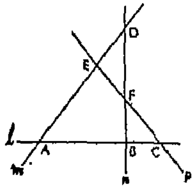


आकृति 10.11

5. आकृति 10.11 में रेखाएँ AB, AC तथा AD बिंदु A से होकर जाती हैं अर्थात् A पर संगामी हैं। उन रेखाओं के नाम बताइए जो (i) B, (ii) C, (iii) D पर संगामी हैं।

6. तीन रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदुओं की अधिकतम संख्या क्या है?

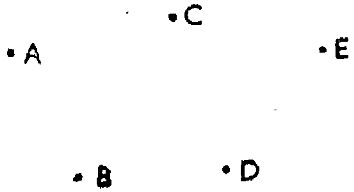
7. किसी तल में l, m, n और p कोई चार रेखाएँ हैं। उनके प्रतिच्छेद बिंदु अंकित कीजिए जैसा कि आकृति 10.12 में दिखाया गया है। ऐसे कितने बिंदु हैं? चार संख्याओं के प्रतिच्छेद बिंदुओं की अधिकतम संख्या क्या है?



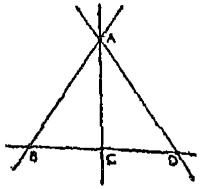
आकृति 10.12

8. आकृति 10.12 में बिंदु A, B तथा C संरेखी है। अन्य संरेखी बिंदुओं के संग्रहों के नाम बताइए।

9. किसी तल में पाँच बिंदु A, B, C, D तथा E लीजिए जैसा कि आकृति 10.13 में दिखाया गया है। इनको दो दो के युग्मों में जोड़कर सभी रेखाएँ खींचिए। इन रेखाओं के नाम लिखिए और उनकी संख्या ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.13



आकृति 10.14

10. यदि प्रश्न 4 में चार बिंदुओं में से तीन बिंदु संरेखी हों तो उनको दो दो के युग्मों में जोड़ने से प्राप्त रेखाओं की संख्या चार रह जाएगी। (देखिए आकृति 10.14) यदि सभी चारों बिंदु संरेखी हों तो ऐसी रेखाओं की संख्या क्या होगी?

10.7 इतिहास सम्बन्धी एक टिप्पणी

10.7 तल में बिंदुओं और रेखाओं के उपर्युक्त आपतन गुणों एवं कुछ ऐसे ही और नियमों को लगभग 300 ई० पू० में महान यूनानी ज्यामितिविद **यूक्लिड** (*Euclid*) ने प्रतिपादित किया था। उन्होंने अपने समय से पूर्व विद्यमान सम्पूर्ण ज्यामितीय ज्ञान को संग्रहित किया। उनका यह कार्य **दी एलीमेंट्स** (*The Elements*) नामक तेरह ग्रन्थों में दिया हुआ है। यूक्लिड ने इन गुणों को **स्वयं सिद्ध प्रमाण** (*Postulates*) कहा अर्थात् इन नियमों की उसने प्रत्यक्ष सत्य के रूप में कल्पना की। इनका बाद का नाम **अभिग्रहीत** (*axioms*) है।

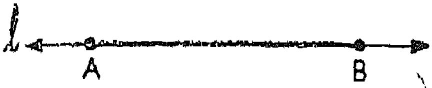
एकक XI

रेखाखंडों का मापन

11.1 रेखाखंड

हम देख चुके हैं कि रेखा को चूंकि वह दोनों दिशाओं में असीमित रूप से विस्तृत होती है, पूर्णतया आकृति में निरूपित नहीं किया जा सकता। अतः हम उसे उसके केवल एक भाग को ही खींचकर निरूपित करते हैं।

मान लीजिए l कोई रेखा है और A, B उस पर स्थित कोई दो बिंदु हैं। (देखिए आकृति 11.1) तब, A से लेकर B तक रेखा के भाग को रेखा l का खंड (*segment*) या केवल **रेखाखंड** (*line segment*) कहते हैं और इसे AB द्वारा व्यक्त किया जाता है। A और B इसके अंत बिंदु (*end points*) कहलाते हैं।



आकृति 11.1 रेखा खंड AB

मान लीजिए तल में कोई दो बिंदु P और Q हैं। (देखिए आकृति 11.2) तब P और Q से होकर केवल एक ही रेखा जा सकती है। (क्यों ?) P से लेकर Q तक इस रेखा का भाग P और Q को जोड़ने वाला रेखाखंड या केवल **रेखाखंड** PQ कहलाता है। चूंकि P और Q से होकर केवल एक ही रेखा जाती है अतः स्पष्ट है कि P और Q को जोड़ने वाला केवल एक ही रेखाखंड होगा। इस प्रकार,

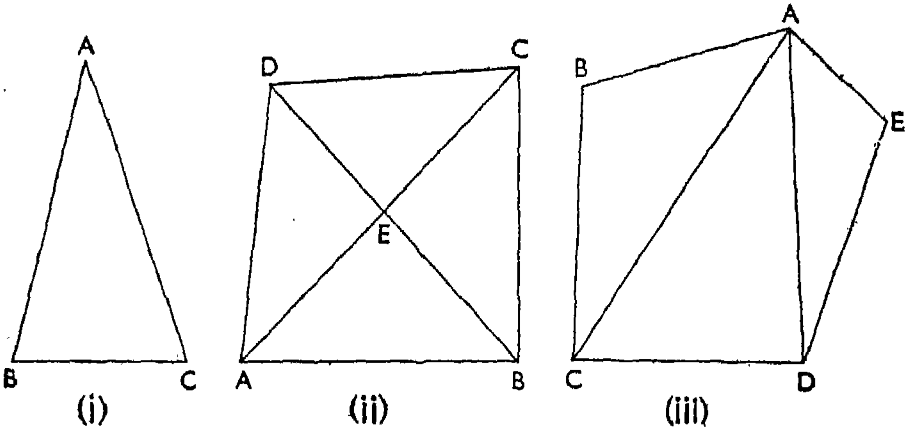


आकृति 11.2 रेखा खंड PQ

यदि किसी रेखाखंड के अंत बिंदु दिए हुए हों तो वह रेखाखंड पूर्णतया ज्ञात हो सकता है।

प्रश्नावली 11.1

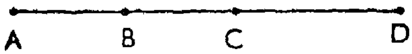
1. निम्न आकृतियों में सभी रेखाखंडों के नाम लिखिए :



आकृति 11.3

प्रत्येक आकृति में कितने रेखाखंड हैं ?

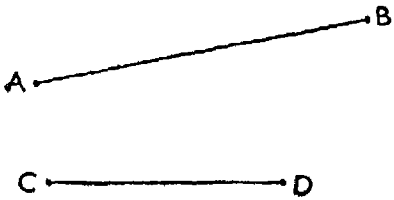
2. आकृति 11.4 में आप कितने रेखाखंड ज्ञात कर सकते हैं ?



आकृति 11.4

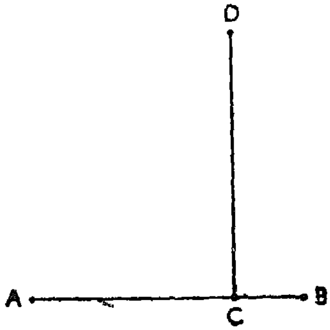
11.2 रेखाखंडों की तुलना

आकृति 11.5 में हमें दो रेखाखंड AB और CD दिए हुए हैं। इनमें कौनसा रेखाखंड अधिक लम्बा है? आप तुरन्त कह सकते हैं कि AB, CD से लम्बा है।



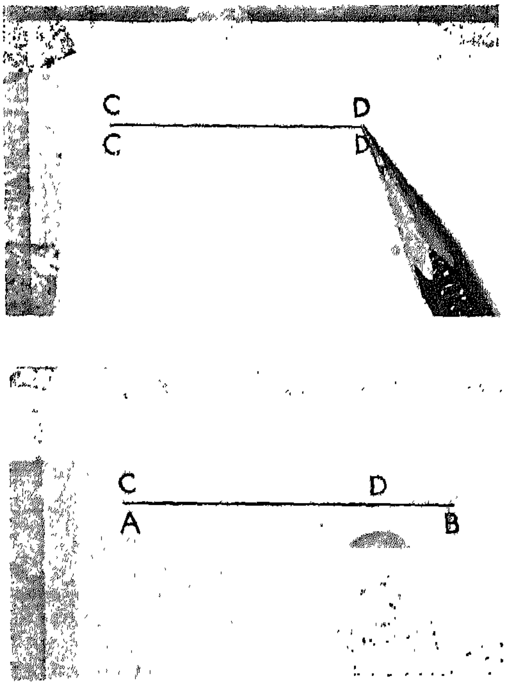
आकृति 11.5

आइए अब आकृति 11.6 को देखें। हमारे पास अब भी दो रेखाखंड AB और CD हैं। परन्तु ये कुछ भिन्न प्रकार से स्थित हैं। इनमें से कौनसा रेखाखंड लम्बा है? आप शायद कहेंगे कि CD लम्बा रेखाखंड है चूँकि यह लम्बा **प्रतीत** होता है। परन्तु यह केवल हमारी दृष्टि का भ्रम ही है—सीधे खड़े रेखाखंड, क्षैतिज रेखाखंडों से लम्बे प्रतीत होते हैं। वास्तव में रेखाखंडों AB और CD में से कोई भी रेखाखंड एक दूसरे से लम्बा नहीं है। ये एक ही लम्बाई के हैं। फिर भी हमारी दृष्टि हमें धोखा दे सकती है। इसलिए हमें रेखाखंडों की तुलना करने के लिए कुछ अच्छी विधियों की आवश्यकता है। एक विधि इस प्रकार है :

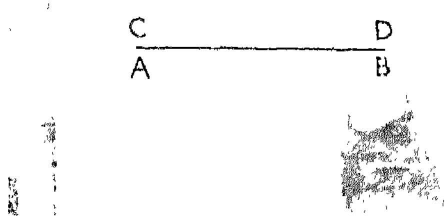


आकृति 11.6

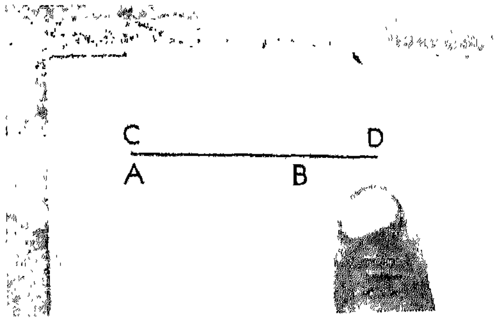
आइए एक अक्स खींचने का कागज (*tracing paper*) लें और उसे रेखाखंड CD के ऊपर रखें। आइए इस कागज़ पर रूलर और पेंसिल की सहायता से रेखाखंड CD का अक्स खींचे। अब हम रेखाखंड CD के इस अक्स को रेखाखंड AB पर इस प्रकार रखते हैं कि C, A पर गिरे और CD, AB के अनुदिश रहे। D को क्या होता है? या तो D, A और B के बीच में गिरेगा [देखिए आकृति 11.7 (i)] या D, ठीक B पर गिरेगा [देखिए आकृति 11.7 (ii)] या D, B के आगे गिरेगा [देखिए आकृति 11.7 (iii)]। स्पष्ट है कि पहली स्थिति में हम कहेंगे कि AB, CD से **लम्बा** है या यह कि CD, AB से **छोटा** है। तीसरी स्थिति में हम कहते हैं कि AB, CD से छोटा है या यह कि CD, AB से लम्बा है। दूसरी स्थिति में हम कहते हैं कि AB और CD की **एक ही लम्बाई है** या यह कि रेखाखंड AB, रेखाखंड CD के **बराबर (सर्वांगसम)** है।



आकृति 11.7 (i)



आकृति 11.7 (ii)



आकृउि 11.7 (iii)

संकेतन* में हम इन्हें निम्न प्रकार लिखते हैं :

स्थिति (i) में $AB > CD$ जिसे 'AB, CD से अधिक है' पढ़ा जाता है और इसका अर्थ है कि AB की लम्बाई, CD की लम्बाई से अधिक है।

स्थिति (ii) में $AB = CD$ जिसे 'AB, CD के बराबर है' पढ़ा जाता है और इसका अर्थ है कि AB की लम्बाई, CD की लम्बाई के बराबर है।

स्थिति (iii) में $AB < CD$ जिसे 'AB, CD से कम है' पढ़ा जाता है और इसका अर्थ है कि AB की लम्बाई, CD की लम्बाई से कम है।

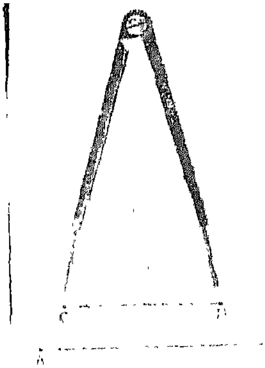
रेखाखंडों के तुलना करने की एक अन्य विधि नीचे प्रश्नावली 11.2 के प्रश्न 1 में दी गई है।

---

*जब हम रेखाखंड और उसकी लम्बाई के लिए दो भिन्न संकेत प्रयोग करना चाहते हैं तो हम रेखाखंड AB को $\overline{AB}$ तथा उसकी लम्बाई को केवल AB लिखते हैं। परन्तु इस पुस्तक में हम रेखाखंड AB और साथ ही उसकी लम्बाई के लिए भी संकेत AB का ही प्रयोग करेंगे। यह संदर्भ से स्पष्ट हो जाएगा कि हमारा तात्पर्य रेखाखंड से है या उसकी लम्बाई से।

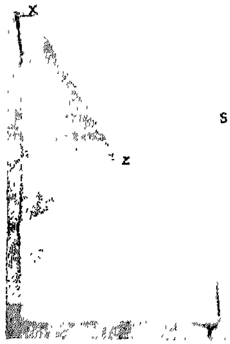
प्रश्नावली 11.2

1. AB और CD दो रेखाखंड है। एक डिवाइडर (divider) लीजिए (आप परकार का भी प्रयोग कर सकते हैं)। डिवाइडर के एक पैर का नुकीला सिरा बिंदु C पर रखिए। अब डिवाइडर को सावधानीपूर्वक इस प्रकार खोलिए कि उसके दूसरे पैर का सिरा बिंदु D पर रहे। इस प्रकार दोनों पैरों के सिरे क्रमशः C और D पर रहेंगे। (देखिए आकृति 11.8) डिवाइडर को उठाइए और उसके फैलाव में बिना कुछ परिवर्तन किए उसे इस प्रकार रखिए कि एक पैर का सिरा A पर गिरे तथा दूसरे पैर को सिरा AB पर या AB को B के आगे बढ़ाने पर गिरे। आप रेखाखंडों AB और CD की लम्बाइयों के बारे में क्या कहसकते हैं जबकि दूसरे पैर का सिरा (i) A और B के बीच में हो ?, (ii) ठीक B पर हो ?, (iii) B के आगे हो ?



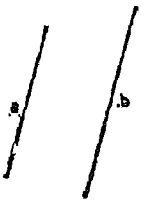
आकृति 11.8
रेखाखंडों की तुलना

2. एक कागज़ का पन्ना लीजिए और उसे मोड़िए। मान लीजिए मोड़ का निशान XY, रेखाखंड XY निरूपित करता है। कागज़ को अब इस प्रकार मोड़िए कि Y ठीक X पर पड़े। इससे बना दूसरा मोड़ का निशान RS मान लीजिए पहले मोड़ के निशान को Z पर काटता है। रेखाखंडों XZ और ZY की तुलना कीजिए। क्या ये बराबर हैं ?



आकृति 11.9

3. आकृति 11.10 में दो रेखाखंड a और b दिए हैं। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि कौनसा रेखाखंड लम्बा है ? अपने डिवाइडर की सहायता से अपने उत्तर की जाँच कीजिए।



आकृति 11.10

11.3 रेखाखंडों का मापन

हम रेखाखंडों की तुलना करने की दो विधियाँ देख चुके हैं। इससे भी एक अच्छी विधि यह होगी कि हम इन रेखाखंडों की एक निश्चित रेखाखंड की लम्बाई के पदों में लम्बाइयाँ मापें। इस निश्चित रेखाखंड की लम्बाई को हम मानक (*standard*) अर्थात् **मात्रक** (*unit*) मान लेते हैं। अभी लगभग पंद्रह वर्ष पहले तक हमारे देश में लम्बाई का मात्रक **फुट** (*foot*) था। यदि इसे 12 समान भागों में विभाजित कर दिया जाए तो प्रत्येक भाग एक **इंच** (*inch*) कहलाता है। परन्तु सन् 1962 में हमारे देश में यह मात्रक फुट से बदलकर **मीटर** (*metre*) कर दिया गया है। इस मात्रक को सबसे पहले सन् 1791 में फ्रांसीसियों ने फ्रांसीसी क्रान्ति (*French Revolution*) के बाद अपनाया था और इसे भूमध्यरेखा (*Equator*) और उत्तरी ध्रुव (*North Pole*) के बीच की दूरी के लगभग एक करोड़वें भाग के बराबर माना जाता था। आजकल, **पेरिस के निकट एक गुम्बज में रखी हुई प्लेटिनम** (*platinum*) **की छड़ पर लगे हुए दो निशानों के बीच की दूरी को मानक मीटर** (*standard metre*) **माना जाता है।** मीटर को 100 समान भागों में विभाजित करने पर प्रत्येक भाग एक **सेन्टीमीटर** (*centimetre*) कहलाता है। सेंटीमीटर को फिर और 10 भागों में विभाजित किया गया है और प्रत्येक भाग एक **मिलीमीटर** (*millimetre*) कहलाता है। इस प्रकार एक सेन्टीमीटर (सेमी), मीटर (मी) का सौवां भाग है तथा एक मिलीमीटर (मिमी), मीटर का हजारवाँ भाग है। दूसरे शब्दों में,

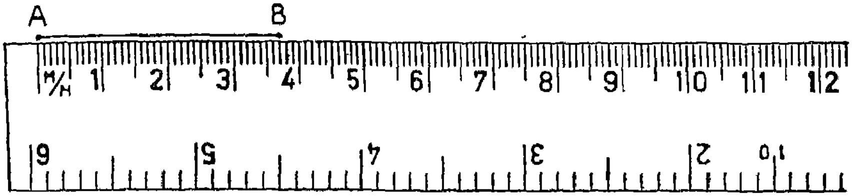
1 मी = 100 सेमी, 1 सेमी = 10 मिमी।

मीटर लम्बाई में तीन फुट से कुछ अधिक होता है तथा एक इंच, ढाई सेन्टीमीटर से कुछ अधिक होता है। हमारे ज्यामिति के कार्य के लिए मीटर काफी बड़ा है और इसलिए हम लम्बाई नापने के लिए सेन्टीमीटर और मिलीमीटर को ही प्राथमिकता देंगे। लम्बे रेखाखंड, उदाहरणार्थ, दो शहरों अथवा गाँवों के बीच की दूरी मापने के लिए हम किलोमीटर (संक्षेप में किमी) का प्रयोग करते हैं। यह 1000 मीटर के बराबर होता है।

कक्षा के अधिकांश कार्य के लिए सीधे किनारे वाले रूलर जिन पर सेन्टीमीटरों और इंचों दोनों के निशान लगे होते हैं उपलब्ध हैं। इन पर सेन्टीमीटर और इंच के उपभागों मिलीमीटर या इंच के दसवें भागों के भी निशान लगे होते हैं। ये प्रायः एक फुट या 6 इंच लम्बाई के होते हैं और इनके एक किनारे पर इंच के निशान तथा दूसरे किनारे पर सेन्टीमीटर के निशान बने होते हैं। वैज्ञानिक कार्य के लिए मीटर छड़ (*metre rods*) तथा अर्धमीटर छड़ (*half metre rods*) भी उपलब्ध हैं। **रूलर पर लगे हुए निशान अंशांकन** (*graduations*) **कहलाते हैं तथा स्वयं रूलर, अंशांकित रूलर** (*graduated ruler*) **कहलाता है।**

अब, मान लीजिए हमें एक दिए हुए रेखाखंड AB की लम्बाई नापनी है। आइए एक सेन्टीमीटर के निशान वाला रूलर लें और उसे रेखाखंड AB के अनुदिश इस प्रकार रखें कि उसका शून्य (0) का निशान A पर रहे जैसा कि आकृति 11.11 में दिखाया गया है।

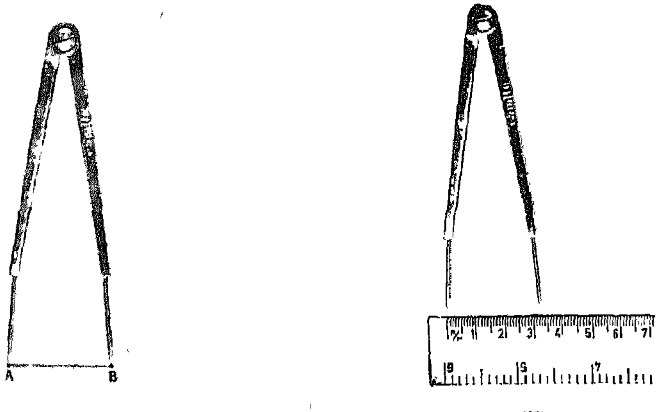
इसके बाद हम रूलर पर B के तदनुरूपी निशान पढ़ते हैं। आकृति 11.11 में हम देखते हैं कि रूलर पर 3 के बाद सातवां लघु अंशांकन (*small graduation*), B के तदनुरूपी निशान हैं। दूसरे शब्दों में, रेखखंड AB में 3 पूर्ण सेन्टीमीटर तथा एक सेन्टीमीटर के सात दशांश (tenths) हैं।



आकृति 11.11 : रेखाखंड का मापन

हम कह सकते हैं कि AB की लम्बाई 3 सेमी 7 मिमी है। इसे दशमलव संकेतन में हम 3.7 सेमी लिखते हैं।

प्राय: रूलर कुछ मिलीमीटर मोटा होता है। अत: हम देखेंगे कि रूलर पर लगे हुए निशान उस समतल में नहीं हैं जिसमें रेखाखंड AB है। इससे कभी कभी जब तक कि कोई बहुत अधिक साव-धान न रहे, A के सामने शून्य निशान रखने और B के तदनुरूपी निशान पढ़ने में कुछ त्रुटि हो जाती है। इस कठिनाई से बचने के लिए हम रेखाखंड मापने के लिए डिवाइडर (या परकार) का निम्न प्रकार प्रयोग कर सकते हैं।



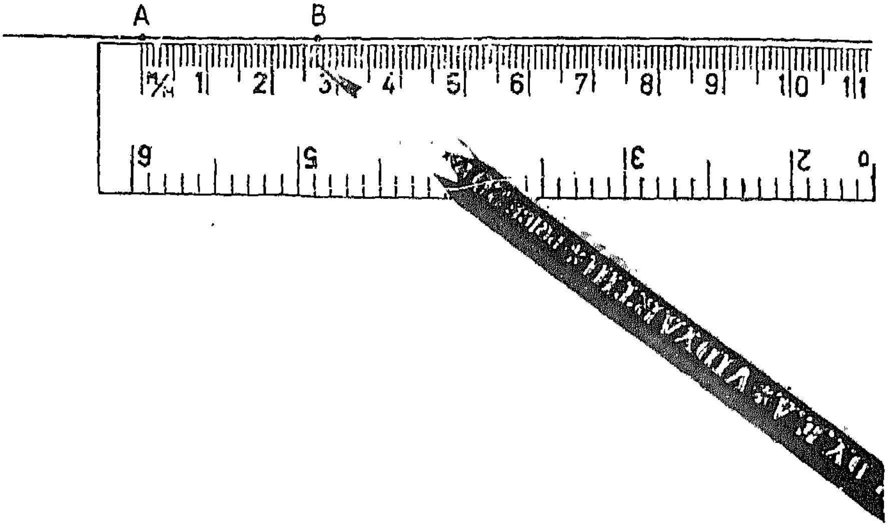
(i) (ii)

आकृति 11.12 : रेखाखंड का मापन

हम डिवाइडर को इतना खोलते हैं कि उसके एक पैर का सिरा A पर रहे तथा दूसरा ठीक B पर रहे। (देखिए आकृति 11.12) अब हम डिवाइडर को उठाते हैं और उसके फैलाव में बिना कोई परिवर्तन किए रूलर पर इस प्रकार रखते हैं कि एक पैर का सिरा शून्य निशान पर रहे। तब हम डिवाइडर के दूसरे पैर के सिरे के तदनुरूपी निशान पढ़ते हैं। आकृति 11.12 में दूसरा सिरा 3 सेमी के निशान के दाईं ओर 1 लघु निशान पर है। इस प्रकार दिए हुए रेखाखंड की लम्बाई 3 सेमी 1 मिमी अर्थात् 3.1 सेमी है।

11.4 दी हुई लम्बाई का रेखाखंड खींचना

मान लीजिए हमें 2.7 सेमी लम्बाई का रेखाखंड खींचना है। हम यह निम्न प्रकार करते हैं: हम एक रेखा खींचते हैं और उस पर कोई बिंदु A ले लेते हैं। (देखिए आकृति 11.13) इसके बाद



आकृति 11.13

हम रेखा के अनुदिश एक रूलर इस प्रकार रखते हैं कि उसका शून्य का निशान A पर रहे। अब हम 2 सेमी के निशान के बाद सात छोटे भाग (*divisions*) गिन लेते हैं और रेखा पर इस निशान के तदनुरूपी बिंदु B अंकित कर लेते हैं। AB, 2.7 सेमी लम्बाई का वांछित रेखाखंड है।

यह सदैव आवश्यक नहीं है कि मापन शून्य चिन्ह से ही प्रारम्भ किया जाए। शून्य चिन्ह रूलर के एक सिरे पर होता है यदि यह सिरा टूट या घिस जाए तो हो सकता है कि इस चिन्ह का प्रयोग करना संभव न हो। तब हम अपना मापन किसी भी सेन्टीमीटर के निशान से प्रारम्भ कर सकते हैं। मान लीजिए हम रूलर इस प्रकार रखते हैं कि उसका 1 सेमी वाला निशान A के तदनुरूपी रहे। तब बिंदु B, 3 सेमी के निशान के बाद सातवें छोटे विभाग के तदनुरूपी लेना पड़ेगा। (क्यों?)

प्रश्नावली 11.3

1. निम्न को सेंटीमीटरों में बदलिए:
   (i) 3 मी, (ii) 2 मी 40 सेमी, (iii) 4.35 मी, (iv) 5.2 मी

2. निम्न को मिलीमीटरों में बदलिए :

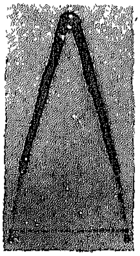
(i) 6 सेमी, (ii) 6.4 सेमी, (iii) 2 मी, (iv) 3 मी 40 सेमी, (v) 4.52 मी

3. निम्न लम्बाइयों के रेखाखंड खींचिए :

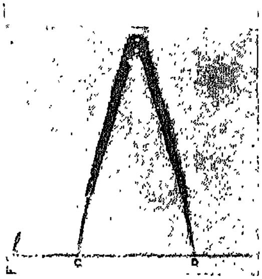
(i) 2 सेमी, (ii) 2 सेमी, 5 मिमी, (iii) 4.3 सेमी (iv) 3.4 सेमी, (v) 6.5 सेमी

4. रेखाखंड AB का एक अंत बिंदु A, रूलर के 1 सेंमी वाले निशान के साथ संपाती है तथा दूसरा अंत बिंदु B 4 सेमी वाले निशान के साथ। रेखाखंड AB की लम्बाई कितनी है ?

11.5 एक दी हुई रेखा से एक दिए हुए रेखाखंड की लम्बाई के बराबर रेखाखंड काटना :



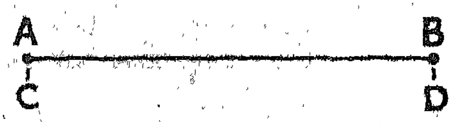
(i)



(ii)

आकृति 11.14

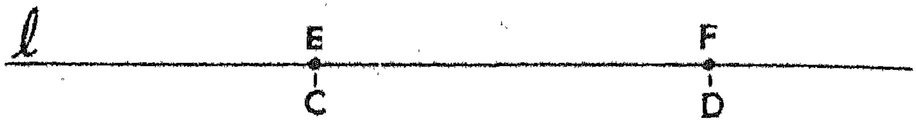
माना AB दिया हुआ रेखाखंड है और l दी हुई रेखा है। हम डिवाइडर को इतना खोलते हैं कि उसके दोनों पैरों के सिरे A और B पर रहें। [देखिए आकृति 11.14 (i)] तब हम डिवाइडर को उठाते हैं और उसके फैलाव में बिना कोई परिवर्तन किए उसे इस प्रकार रखते है कि दोनों पैरों के सिरे l पर रहें। हम इन दोनों के तदनुरूपी l पर बिंदु C और D अंकित कर लेते हैं। [देखिए आकृति 11.14 (ii)] तब रेखाखंड CD, रेखाखंड AB की लम्बाई के बराबर है। अर्थात् CD वांछित रेखाखंड है।



(i)

आकृति 11.15

हम इस कार्य के लिए कागज की एक पट्टी (*strip*) का भी प्रयोग कर सकते हैं। वास्तव में इसको कक्षा में गतिविधि हेतु एक सुझाव माना जा सकता है। आइए एक कागज को मोड़ें जिससे मोड़ का निशान एक सीधे किनारे (*straight edge*) का रूप धारण कर लेता है। अब इस किनारे को रेखाखंड AB के अनुदिश रखें। कागज के किनारे (*paper edge*) पर हम A और B के तदनुरूपी क्रमश: दो चिन्ह C और D अंकित करते हैं। [देखिए आकृति 11.15(i)] अब हम इस किनारे को रेखा l के अनुदिश रखते हैं। हम रेखा l पर चिन्ह C के तदनुरूपी बिंदु E तथा चिन्ह D के तदनुरूपी बिंदु F लेते हैं। [देखिए आकृति 11.15 (ii)] तब रेखाखंड EF की लम्बाई रेखाखंड AB की लम्बाई के बराबर है। अर्थात् EF वांछित रेखाखंड है।

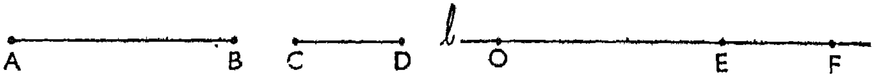


(ii)

आकृति 11.15

11.6 दो दिए हुए रेखाखंडों की लम्बाइयों के योग के बराबर लम्बाई का रेखाखंड खींचना।

मान लीजिए AB और CD दो रेखाखंड दिए हैं। आइए एक रेखा l लें और उस पर एक बिंदु O अंकित कर लें। हम l पर रेखाखंड AB की लम्बाई के बराबर एक रेखाखंड इस प्रकार खींचते हैं कि उसका एक अंत बिंदु O हो। मान लीजिए यह रेखाखंड OE है। अब हम l पर रेखाखंड CD



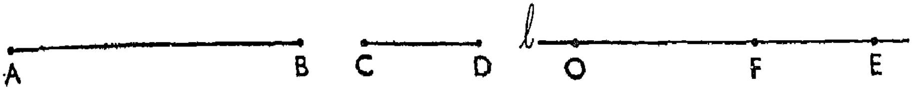
आकृति 11.16 $OF=AB+CD$

की लम्बाई के बराबर एक रेखाखंड EF इस प्रकार खींचते हैं कि E, O और F के मध्य स्थित हो। (देखिए आकृति 11.16) तब OF वांछित रेखाखंड है। (क्यों?) हम लिखते हैं कि $OF=AB+CD$।

11.7 दो दिए हुए रेखाखंडों की लम्बाइयों के अंतर के बराबर लम्बाई का रेखाखंड खींचना

मान लीजिए AB और CD दो दिए हुए रेखाखंड हैं। हम यह मान लेते हैं कि AB, CD से लम्बा है अर्थात् $AB > CD$। पहले ही की भांति हम एक रेखा l लेते हैं और उस पर एक बिंदु O अंकित कर लेते

हैं। हम l पर AB की लम्बाई के बराबर एक रेखाखंड OE खींचते हैं। इसके बाद हम l पर CD की लम्बाई के बराबर एक रेखाखंड EF इस प्रकार खींचते हैं कि F, O और E के मध्य स्थित हो।



आकृति 11.17 $OF=AB-CD$

(देखिए आकृति 11.17) OF वांछित रेखाखंड है। (क्यों?) हम लिखते हैं कि $OF=AB-CD$।
यदि CD, AB से लम्बा हो तो हम $CD-AB$ की लम्बाई का रेखाखंड खींचते हैं।

प्रश्नावली 11.4

1. निम्न लम्बाई के रेखाखंड खींचिए :
   (i) 7.5 सेमी (ii) 3.4 सेमी (iii) 5.2 सेमी
2. अपनी कापी के एक पन्ने की सेन्टीमीटरों में लम्बाई व चौड़ाई नापिए।
3. 4.2 सेमी तथा 2.3 सेमी लम्बाइयों के दो रेखाखंड खींचिए। रूलर की सहायता से इन दोनों रेखाखंडों की लम्बाइयों के योग के बराबर लम्बाई का एक रेखाखंड खींचिए और उसकी लम्बाई मापिए।
4. AB एक रेखाखंड है। एक रेखाखंड खींचिए जिसकी लम्बाई AB की लम्बाई के दुगुने के बराबर हो। (यदि वांछित रेखाखंड CD हो तो हम लिखते हैं कि $CD=2AB$)
5. 12 सेमी लम्बाई का एक रेखाखंड लीजिए। इसमें से 4.5 सेमी लम्बाई का एक रेखाखंड इस प्रकार काटिए की इस रेखाखंड का एक अंत बिंदु वहीं रहे जो पहले रेखाखंड का है। बचे हुए रेखाखंड की लम्बाई मापिए।
6. अपनी कापी की लम्बाई और चौड़ाई मापिए। एक रेखाखंड खींचिए जिसकी लम्बाई इन लम्बाईयों के अंतर के बराबर हो।
7. दिया हुआ है कि $AB=3$ सेमी तथा $CD=2$ सेमी। निम्न रेखाखंड खींचिए :
   (i) $2AB$ (ii) $AB+CD$ (iii) $AB-CD$
   (iv) $2AB-CD$ (v) $3\,CD$

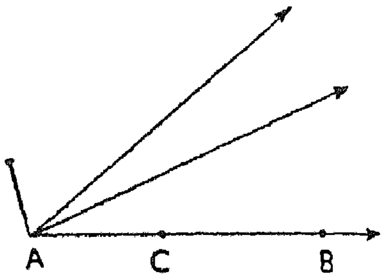
   प्रत्येक स्थिति में आपने जो रेखाखंड खींचा है उसकी लम्बाई मापिए।

एकक XII

कोण

12.1 किरण

आइए, ड्राइंग बोर्ड के एक बिंदु A पर एक पिन लगाएँ। फिर एक डोरी लें और उसके एक सिरे को A पर लगी हुई पिन से बांध दें। डोरी को बोर्ड के जितना संभव हो सके समीप रखते हुए आइए अब उसके दूसरे सिरे B को खींचें जिससे कि डोरी तनी हुई रहे। डोरी इस स्थिति में एक रेखा का भाग AB निरूपित करती है। हम जानते हैं कि यदि हम यह कल्पना करें कि डोरी का दोनों दिशाओं अर्थात् A से B और B से A में असीमित विस्तार है तो यह एक रेखा निरूपित करती है। अब मान लीजिए कि डोरी केवल एक ही दिशा माना B से अर्थात् AB के अनुदिश विस्तृत है। तब हमें रेखा का केवल एक ऐसा भाग प्राप्त होता है जो A से प्रारम्भ होता है और जिसका AB दिशा में असीमित विस्तार है। हम इसे **किरण*** AB (*ray AB*) कहते हैं तथा A इसका **प्रारम्भिक बिंदु** (*initial point*) कहलाता है।



आकृति 12.1

मान लीजिए किरण AB पर C कोई अन्य बिंदु है। (देखिए आकृति 12.1) क्या किरण AC और किरण AB एक ही हैं? हां।

यदि हमें किरण का प्रारम्भिक बिंदु और उस पर स्थित कोई अन्य बिंदु ज्ञात हो तो किरण पूर्णतया ज्ञात हो जाती है।

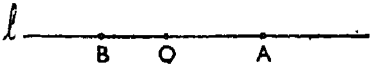
उपर्युक्त प्रयोग में डोरी AB कितनी स्थितियाँ धारण कर सकती हैं? एक, दो या कितनी भी? **एक दिए हुए प्रारम्भिक बिंदु से चाहें जितनी किरणें खींची जा सकती हैं।**

---

*किरण AB को व्यक्त करने के लिए तथा इस बात पर जोर देने के लिए कि किरण का प्रारम्भिक बिंदु A है और उसकी दिशा A से B की ओर है संकेत $\overrightarrow{AB}$ का भी प्रयोग किया जाता है। इसी आधार पर रेखा AB के लिए संकेत $\overleftrightarrow{AB}$ का प्रयोग किया जाता है।

यद्यपि रेखा AB, किरण AB, रेखाखंड AB और रेखाखंड AB की लम्बाई व्यक्त करने के लिए क्रमशः चार भिन्न संकेत $\overleftrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$ तथा AB प्रचलित है परन्तु हम वर्तमान स्तर पर इन्हें अनावश्यक अनुभव करते हैं। इसलिए इन चारों के लिए एक ही संकेत AB का प्रयोग करेंगे। यह संदर्भ से स्पष्ट हो जाएगा कि हमारा तात्पर्य चारों में से किससे है।

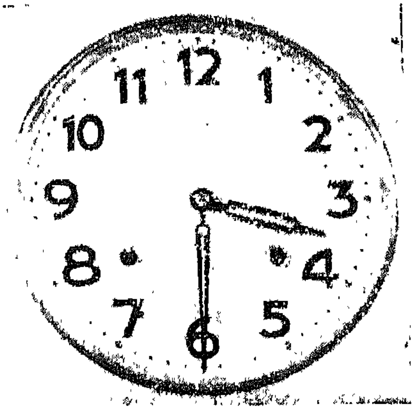
मान लीजिए l कोई रेखा है। आइए l पर तीन बिंदु O, A और B इस प्रकार लें कि A और B, O की विपरीत दिशाओं में रहें। (देखिए आकृति 12.2) हमें एक ही प्रारम्भिक बिंदु O वाली दो किरणें OA और OB प्राप्त होती हैं। ऐसी किरणें **विपरीत किरणें** (*opposite rays*) कहलाती हैं तथा दिशाएँ OA और OB **विपरीत दिशाएँ** (*opposite direction*) कहलाती हैं।



आकृति 12.2

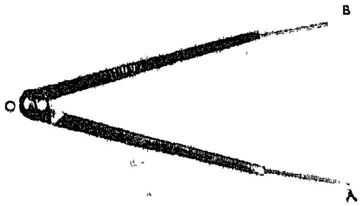
12.2 कोण

आइए आकृति 12.3 में दी हुई घड़ी को देखें। घंटे की सुई 3 और 4 के बीच में है तथा मिनट की सुई 6 पर है। हम कहते हैं कि सुइयाँ एक दूसरे पर झुकी हुई हैं या यह कि सुइयाँ परस्पर एक कोण बनाती हैं।



आकृति 12.3

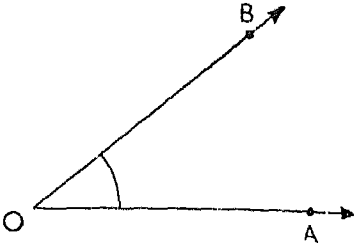
पुन: एक डिवाइडर लें और उसे कागज़ के तल में इस प्रकार रखें कि उसके दोनों पैर सटे हुए रहें। उसके एक पैर को OA पर स्थिर किए हुए, आइए अब डिवाइडर को खोलें जिससे कि दूसरा पैर जोड़ O पर लगे हुए कब्जे (*hinge*) के चारों ओर घूमने (*rotate*) लगता है। (देखिए आकृति 12.4) मान लीजिए अब दूसरा पैर OB पर है। हम कह सकते हैं कि OA और OB एक कोण बनाते हैं। यदि पैर OB को और अधिक घुमाएँ तो कोण का क्या होता है?



आकृति 12.4

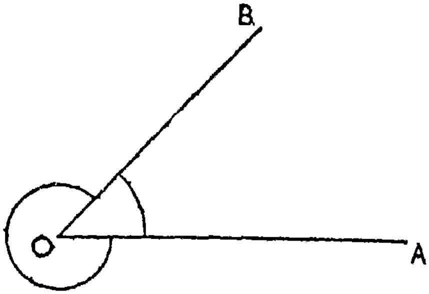
यदि घड़ी की सुइयों या डिवाइडर के पैरों को किरणों OA और OB का निरूपण मानें तो हम कहते हैं कि दोनों किरणें एक कोण बनाती हैं। साथ ही, चूँकि दोनों किरणों के बीच का झुकाव बढ़ाया या घटाया जा सकता है अत: हम देखते हैं कि कोण का एक परिमाण (*magnitude*) होता है। किरण OB को उसकी प्रारम्भिक स्थिति OA से अंतिम स्थिति तक लाने में आवश्यक कुल **घूर्णन** (*rotation*) **की मात्रा से इस परिमाण को मापा जा सकता है।**

एक ही प्रारम्भिक बिंदु O से निकलने वाली किरणों OA और OB के लिए यह कहा जाता है कि वे एक कोण बनाती हैं। (देखिए आकृति 12.5) बिंदु O इसका **शीर्ष** (*vertex*) तथा किरणें OA और OB **भुजाएँ** (*arms*) कहलाती हैं। एक भुजा को शीर्ष के चारों ओर घुमाकर दूसरी भुजा की स्थिति में लाने के लिए आवश्यक घूर्णन की मात्रा से इस कोण का **परिमाण** मापा जाता है। प्रायः कोण व्यक्त करने के लिए दोनों भुजाओं को एक वृत्तीय चाप से जोड़ देते हैं जैसा कि आकृति 12.5 में दिखाया गया है।



आकृति 12.5

दो किरणें OA और OB वास्तव में दो कोण बनाती हैं जैसा कि आकृति 12.6 में दर्शाया गया है। इनमें से किसी को भी कोण AOB से व्यक्त किया जा सकता है। फिर भी, इनमें से एक कोण दूसरे से बड़ा है। संदिग्ध स्थिति से बचने के लिए हम यह मान लेते हैं कि जब तक कि कुछ कहा न जाए, किरणों OA और OB से बनने वाले दोनों कोणों में से छोटा कोण, कोण AOB होगा।

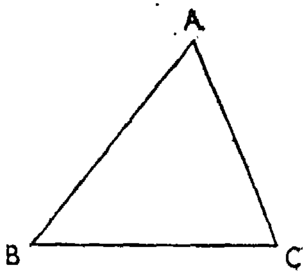


आकृति 12.6

हम कोण व्यक्त करने के लिए संकेत '$\angle$' का प्रयोग करते हैं और 'कोण AOB' या 'कोण BOA' के लिए क्रमशः $\angle AOB$ या $\angle BOA$ लिखते हैं। कोण का नाम लिखते समय शीर्ष सदैव मध्य में लिखा जाता है। कभी कभी हम कोण को केवल उसके शीर्ष से ही व्यक्त करते हैं जैसे कि $\angle O$ या कोण O।

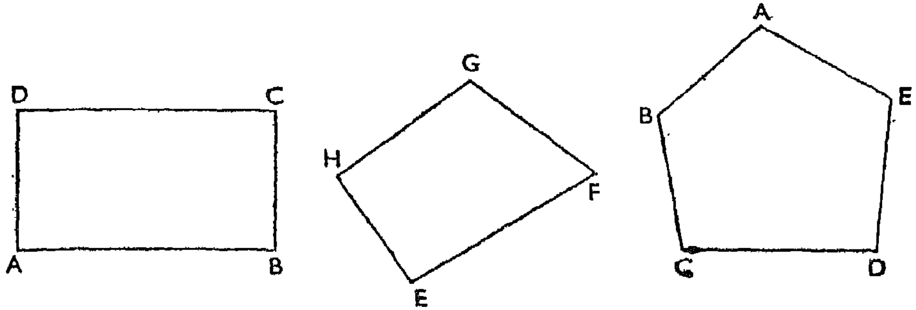
प्रश्नावली 12.1

1. आकृति 12.7 में तीन कोण दिए हैं। इनमें से एक $\angle BAC$ या केवल $\angle A$ है। क्या आप अन्य दोनों कोणों के नाम बता सकते हैं?



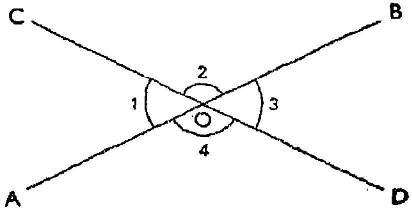
आकृति 12.7

2. आकृति 12.8 में दिए हुए प्रत्येक बहुभुज के कोणों के नाम बताइए।



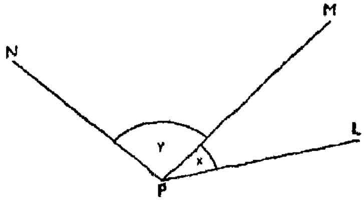
आकृति 12.8

3. कभी कभी कोणों को व्यक्त करने के लिए संख्यांक या अक्षरों का प्रयोग सुविधाजनक रहता है। आकृति 12.9 में $\angle AOC$ को $\angle 1$ नाम दिया गया है। क्या आप 2, 3 तथा 4 द्वारा अंकित कोणों के पूरे नाम बता सकते हैं?



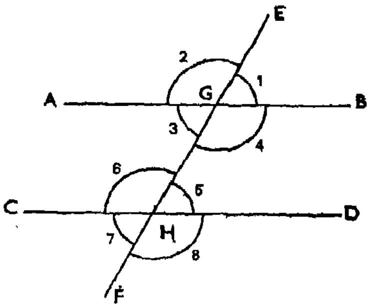
आकृति 12.9

4. आकृति 12.10 में $\angle x$, $\angle LPM$ है। y द्वारा अंकित कोण का पूरा नाम बताइए।



आकृति 12.10

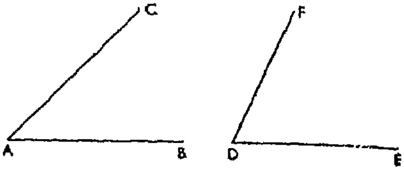
5. आकृति 12. 11 में 1, 2, 3,...8 द्वारा अंकित कोणों के पूरे नाम बताइए।



आकृति 12.11

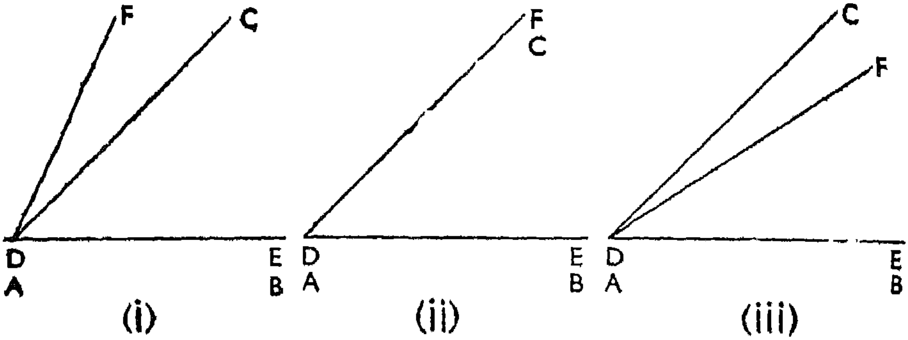
12.3 कोणों की तुलना

आइए आकृति 12.12 में दिए हुए कोणों BAC तथा EDF को देखें। इनमें कौन बड़ा है? केवल देखकर ही हम कह सकते हैं कि $\angle EDF$, $\angle BAC$ से बड़ा है। परन्तु हम अपनी दृष्टि पर सदैव भरोसा नहीं रख सकते। अतः हम दो कोणों के परिमाणों की तुलना के लिए निम्न विधि का प्रयोग करते हैं।



आकृति 12.12

हम एक अक्स करने के कागज़ को एक कोण माना $\angle BAC$ पर रखते हैं और इस कागज़ पर उसका अक्स उतार लेते हैं। अब हम इस अक्स को उठाकर $\angle EDF$ पर इस प्रकार रखते हैं कि शीर्ष A शीर्ष D पर पड़े तथा भुजा AB, भुजा DE के अनुदिश रहे। (देखिए आकृति 12.13)



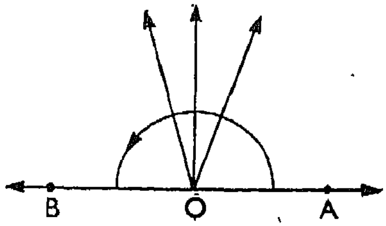
आकृति 12.13

भुजा AC की क्या संभव स्थितियाँ हो सकती हैं? यह DE और DF के बीच में पड़ सकती है [देखिए आकृति 12.13(i)] या यह ठीक DF पर पड़ सकती है (देखिए आकृति 12.13 (ii)] या यह DF के आगे पड़ सकती है [देखिए आकृति 12.13(iii)]। पहली स्थिति में हम कहते हैं कि $\angle BAC < \angle EDF$, दूसरी स्थिति में यह कि $\angle BAC = \angle EDF$ तथा तीसरी स्थिति में यह कि $\angle BAC > \angle EDF$। (हम कोण तथा उसके परिमाण दोनों के लिए ही एक ही संकेतन का प्रयोग करेंगे) **स्थिति (ii) में दोनों कोण बराबर हैं।**

कोणों के परिमाणों के तुलना करने की यह विधि बहुत संतोषजनक नहीं है। एक अच्छी विधि यह होगी कि हम कोणों को एक मानक कोण (*standard angle*), जिसे हम मापन का मात्रक मान लेते हैं, के पदों में मापें।

12.4 कोण की अंशीय माप

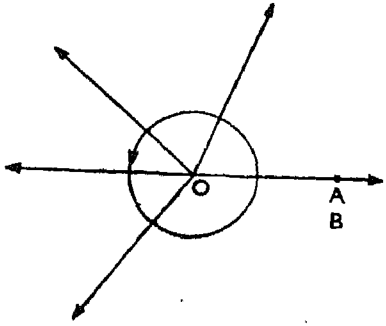
आइए एक किरण OA लें और उसे बिंदु O के चारों ओर घुमाएं। (देखिए आकृति 12.14) जैसे जैसे यह किरण घूमती है यह अपनी प्रारम्भिक स्थिति से बढ़ते हुए परिमाण के कोण बनाती है। मान लीजिए यह तब तक घूमती है जब तक कि यह स्थिति OB पर न आ जाए जो कि प्रारम्भिक स्थिति OA की विपरीत दिशा में है। इस प्रकार बना हुआ कोण AOB **ऋजु कोण** (*straight angle*) कहलाता है। ऋजु कोण की दोनों भुजाएँ विपरीत किरणें हैं।



आकृति 12.14 : ऋजुकोण

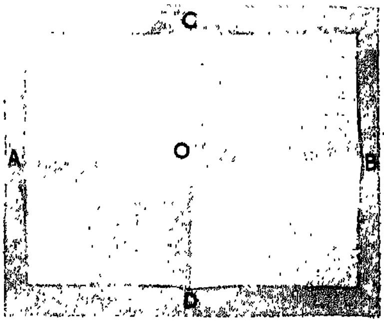
यदि हम किरण OA को और घूमने दें तो वह O के चारों ओर एक चक्कर (*revolution*) पूरा करने के बाद OA के संपाती (*coincident*) हो जाती है (अर्थात् OB और OA एक ही किरण हैं)। इस प्रकार बना कोण AOB **संपूर्ण कोण** (*complete angle*) कहलाता है। (देखिए आकृति 12.15)

यदि किरण OA बिल्कुल भी न घुमाई जाए तो हम कहते हैं कि हमें **शून्य कोण** (*zero angle*) प्राप्त हो गया है। दूसरे शब्दों में यदि कोण की दोनों भुजाएँ संपाती हों तो हम कहते हैं कि कोण का परिमाण शून्य है। हम देखते हैं कि **संपूर्ण** कोण में भी दोनों भुजाएँ संपाती होती हैं। परन्तु ये भुजाएँ केवल एक पूरे चक्कर के बाद संपाती हुई हैं। निस्संदेह, संपूर्ण कोण का परिमाण शून्य नहीं है।



आकृति 12.15 : संपूर्ण कोण

आइए एक कागज़ का पन्ना लें और उसे मोड़ें ताकि हमें एक मोड़ का निशान अर्थात् रेखा AB प्राप्त हो जाए। अब यदि हम कागज़ को खोल लें और उसे दुबारा इस प्रकार मोड़ें कि A, B पर पड़े तथा मोड़ का निशान AB स्वयं पर संपाती हो, तो हमें एक अन्य मोड़ का निशान CD प्राप्त हो जाता है। रेखाएँ AB और CD माना परस्पर O पर काटती हैं। (देखिए आकृति 12.16) अब हमें O पर चार बराबर कोण प्राप्त हो जाते हैं। (क्यों?) इनमें से प्रत्येक कोण **समकोण** (*right angle*) कहलाता है। इस प्रकार $\angle AOC$, $\angle COB$, $\angle BOD$ और $\angle DOA$ में से प्रत्येक एक समकोण है।



आकृति 12.16

अतः एक ऋजु कोण, जैसे कि $\angle AOB$ में दो समकोण होते हैं। इसी प्रकार एक संपूर्ण कोण में चार समकोण होते हैं।

हम कोण मापने के लिए समकोण को अपना मात्रक मान सकते हैं। परन्तु हमारे कार्य के लिए यह बहुत बड़ा मात्रक है क्योंकि तब हमें बहुत से कोणों को एक समकोण के भागों में मापना पड़ेगा।

इसलिए हम समकोण को नब्बे बराबर भागों में जो कि प्रत्येक एक **अंश** (*degree*) कहलाता है, विभाजित करते हैं और अंश को कोण मापन का मात्रक मान लेते हैं। 'अंश' को संख्या के ऊपर एक छोटा वृत्त '*o*' लिखकर व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार एक अंश को 1° लिखा जाता है।

पुन: अंश को 60 मिनटों (*minutes*) तथा प्रत्येक मिनट को 60 सैकण्डों (*seconds*) में विभाजित किया गया है। 'मिनट' को संख्या के ऊपर एक तिरछी छोटी लकीर खींच कर तथा 'सैकण्ड' को दो तिरछी छोटी लकीरें खींच कर व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार एक मिनट को 1′ तथा एक सैकण्ड को 1″ लिखा जाता है। मिनट और सैकण्ड का प्रयोग केवल तब ही किया जाता है जबकि बहुत ही शुद्ध मापनों (*accurate measurements*) की आवश्यकता हो उदाहरणार्थ जैसे खगोल विद्या संबंधी (*astromonical*) कार्य में।

संक्षेप में,

1 संपूर्ण कोण $= 360°$

1 ऋजु कोण $= 180°$

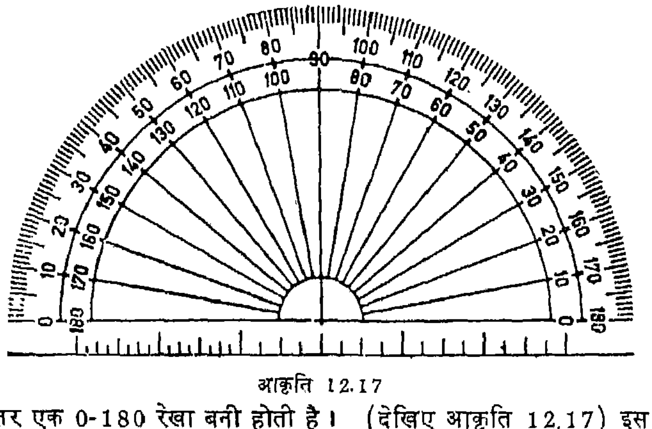
1 समकोण $= 90°$

$1° = 60'$

$1' = 60''$

12.5 चाँदा और उसके उपयोग

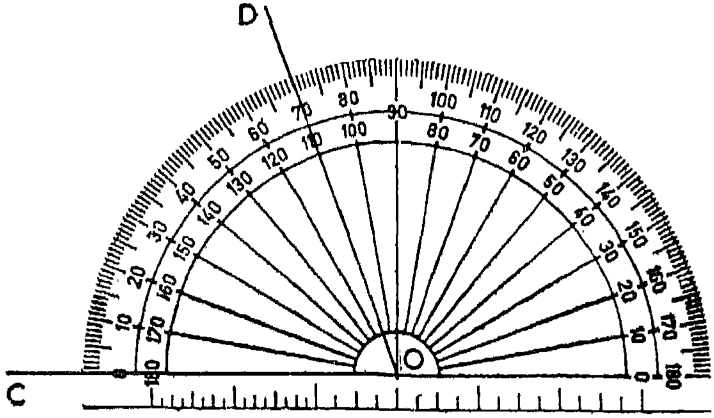
चाँदा (*protractor*) धातु या प्लास्टिक (*plastic*) का एक अर्धवृत्ताकार खंड होता है। इसके अर्धवृत्तीय किनारे पर अंश के निशान लगे होते हैं तथा सीधे किनारे के अनुदिश या अधिकतर सीधे



आकृति 12.17

किनारे के समांतर एक 0-180 रेखा बनी होती है। (देखिए आकृति 12.17) इस 0-180 रेखा का मध्य-बिंदु चाँदे का केन्द्र कहलाता है। अर्धवृत्ताकार किनारे पर अंशों के चिन्ह हैं। अंशों 0, 10,

20, 30, ..., 170, 180 के चिन्ह विशिष्ट रूप से दर्शाए जाते हैं तथा ये किनारे के अनुदिश लिखे होते हैं। यही चिन्ह उल्टे क्रम में भी लिखे होते हैं जिससे कि आकृति 12.18 में दिए हुए कोण COD जैसे कोणों को सुविधाजनक रूप से मापा जा सकता है। इसी कारण 0-180 रेखा को 0-0 (शून्य-शून्य) रेखा भी कहा जा सकता है।

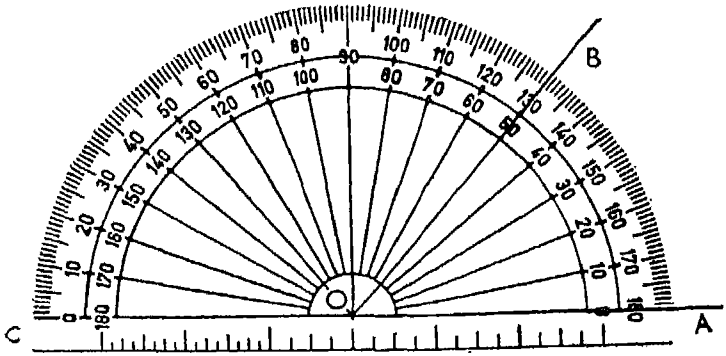


आकृति 12.18

अपने चाँदे को देखिए। किसी चिन्ह विशेष पर लिखी हुई दोनों संख्याओं का योग क्या है?

चाँदे का, कोण मापने तथा साथ ही दिए हुए परिमाण का कोण खींचने में उपयोग किया जाता है।

(क) दिया हुआ कोण मापना



आकृति 12.19

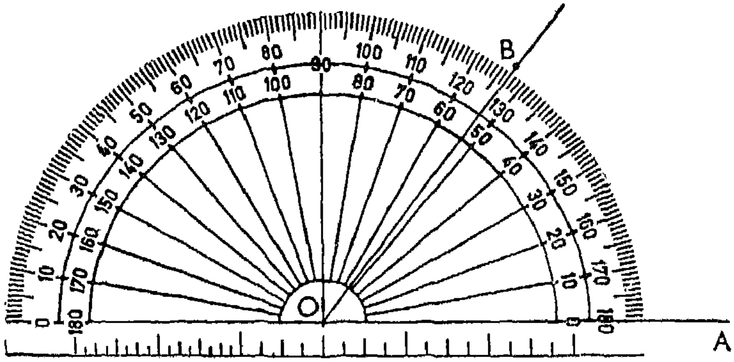
माना दिया हुआ कोण AOB है। हम चाँदे को इस प्रकार रखते हैं कि उसका केन्द्र **कोण के** शीर्ष पर पड़े तथा 0-0 रेखा, भुजा OA के अनुदिश रहे। (देखिए आकृति 12.19) **तब हम** A **पर**

0° से प्रारम्भ करके अंश चिन्हों (*degree marks*) को बढ़ते हुए क्रम वाली दिशा में पढ़ते हुए वह चिन्ह पढ़ते हैं जिससे होकर भुजा OB जाती है।

आकृति 12.19 में, OB के तदनुरूपी चिन्ह 50 है। इस प्रकार $\angle AOB$ का परिमाण 50° है। हम लिखते हैं कि $\angle AOB = 50°$। यह देखना शिक्षाप्रद और रुचिकर होगा कि $\angle COB = 130°$। (क्यों ?)

(ख) दिए हुए परिमाण का कोण बनाना

मान लीजिए हमें 53° का कोण बनाना है। हम एक किरण OA खींचते हैं और उस पर चाँदे को इस प्रकार रखते हैं कि उसका केन्द्र O पर पड़े तथा 0-0 रेखा OA के अनुदिश रहे। तब हम चाँदे पर 53° वाला चिन्ह ढूँढ़ते हैं तथा एक नुकीली पेंसिल से इस चिन्ह के तदनुरूपी एक बिंदु मान लीजिए B अंकित कर लेते हैं। अब हम O और B को जोड़ते हैं। (देखिए आकृति 12.20) तब AOB वांछित कोण है।

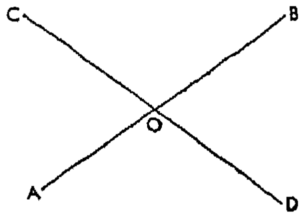


आकृति 12.20

हम देखते हैं कि चाँदे की सहायता से हम 180° तक के कोण माप या बना सकते हैं।

प्रश्नावली 12.2

1. AB और CD दो रेखाएँ हैं जो कि बिंदु O पर काटती हैं। (देखिए आकृति 12.21) $\angle AOC$ तथा $\angle BOD$ को मापिए। क्या ये बराबर हैं? कोण AOC और BOD **शीर्षाभिमुख कोण** (*vertically opposite angles*) कहलाते हैं। शीर्षाभिमुख कोणों के अन्य युग्म $\angle BOC$ तथा $\angle AOD$ को मापिए। आप इनके परिमाण के बारे में क्या कह सकते हैं? उपर्युक्त प्रक्रिया को किसी अन्य प्रतिच्छेदी रेखाओं के युग्म के साथ दोहराइए। आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?



आकृति 12.21

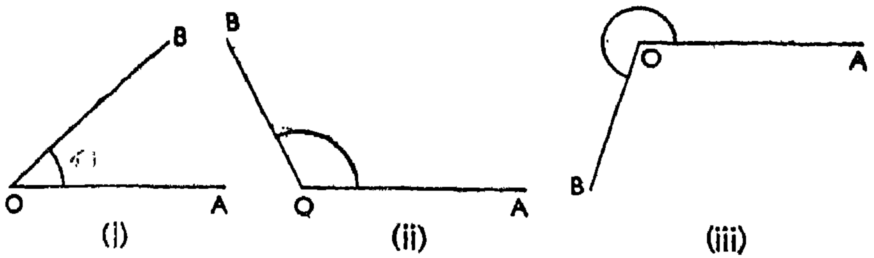
(हम देखते हैं कि शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं)

2. अपने चाँदे की सहायता से निम्न कोण बनाइए :

(i) 15°	(ii) 27°	(iii) 30°	(iv) 36°
(v) 45°	(vi) 54°	(vii) 60°	(viii) 75°
(ix) 120°	(x) 135°		

12.6 कोणों के प्रकार

हम पहले ही देख चुके हैं कि समकोण में 90°, ऋजुकोण में 180° तथा संपूर्ण कोण में 360° होते हैं।



(i) न्यून कोण (ii) अधिक कोण (iii) प्रतिवर्ती कोण

आकृति 12.22

0° वाले कोण को छोड़कर समकोण से छोटा कोई भी कोण **न्यून** (*acute*) कोण कहलाता है [देखिए आकृति 12.22(i)]

समकोण से बड़ा परन्तु ऋजुकोण से छोटा कोण **अधिक** (*obtuse*) कोण कहलाता है [देखिए आकृति 12.22(ii)]

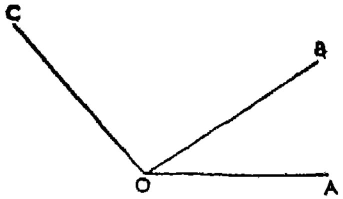
ऋजुकोण से बड़ा परन्तु संपूर्ण कोण से छोटा कोण **प्रतिवर्ती** (*reflex*) कोण कहलाता है [देखिए आकृति 12.22(iii)]

इस प्रकार, न्यूनकोण 0° और 90° के बीच, अधिक कोण 90° और 180° के बीच तथा प्रतिवर्ती कोण 180° और 360° के बीच होता है।

12.7 कोणों के युग्म

12.7.1 आसन्न कोण

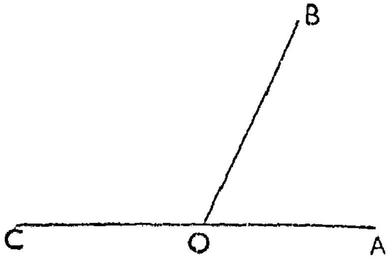
आइए आकृति 12.23 को देखें। हमारे पास उभयनिष्ठ भुजा OB वाले दो कोण AOB तथा BOC हैं। साथ ही, इनकी अन्य भुजाएँ OA तथा OC, OB की विपरीत दिशाओं में हैं। ऐसे दो कोण, **आसन्न कोण** (*adjacent angle*) कहलाते हैं।



आकृति 12.23

12.7.2 रैखिक युग्म

आइए आकृति 12.24 को देखें। AOC एक रेखा है। AOB तथा BOC आसन्न कोण हैं जिनकी बाहरी भुजाएँ एक रेखा में हैं। ऐसे आसन्न कोणों का युग्म **रैखिक युग्म** (*linear pair*) कहलाता है।



आकृति 12.24

12.7.3 पूरक कोण

यदि दो कोणों का योग 90° हो तो वे **पूरक कोण** (*complementary angles*) कहे जाते हैं तथा प्रत्येक कोण एक दूसरे का **पूरक** (*complement*) कहलाता है। उदाहरणार्थ 40° और 50° के कोण पूरक हैं। 40° का कोण 50° के कोण का पूरक है तथा 50° का कोण 40° के कोण का पूरक है।

12.7.4 संपूरक कोण

यदि दो कोणों का योग 180° हो तो वे **संपूरक कोण** (*supplementary angles*) कहे जाते हैं तथा प्रत्येक कोण एक **दूसरे का संपूरक** (*supplement*) कहलाता है। उदाहरणार्थ 70° और 110° के कोण संपूरक है तथा प्रत्येक एक दूसरे का संपूरक है।

हम देखते हैं कि **कोणों का रैखिक युग्म संपूरक है।**

प्रश्नावली 12.3

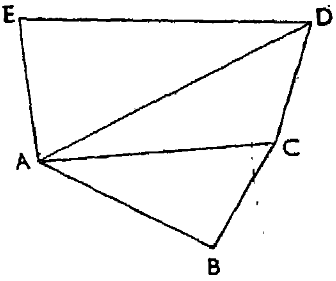
1. अपने आस पास देखिए और समकोण, न्यून कोण एवं अधिक कोणों के **कुछ** उदाहरण दीजिए।

2. अपनी भुजाओं का प्रयोग करके दिखाइए कि आप न्यून कोण, अधिक कोण तथा समकोण किस प्रकार बनाते हैं।

3. दत्त पश्चिम की ओर मुँह करके खड़ा है। वह दाईं ओर एक समकोण पर घूम जाता है। अब वह किस दिशा में देख रहा है?

4. शीला उत्तर की दिशा में एक नाव खे रही है। वह उसे एक ऋजु कोण पर घुमा देती है। अब वह किस दिशा में नाव खे रही है?

5. **कुछ** न्यून और अधिक कोण खींचिए और उन्हें मापिए।



आकृति 12.25

6. आकृति 12.25 में तीन आसन्न कोणों के युग्मों के नाम लिखिए।

7. निम्न कोणों के पूरक ज्ञात कीजिए :

   50°, 70°, 80°, 30°, 45°

8. निम्न कोणों के संपूरक ज्ञात कीजिए :

   150°, 50°, 70°, 80°

9. निम्न कोण युग्मों में जाँच कीजिए कि कौन से कोण पूरक हैं और कौन से संपूरक :

   (i) 20°, 70° (ii) 30°, 60° (iii) 44°, 46°

   (iv) 40°, 140° (v) 75°, 105° (vi) 42°, 138°

   (vii) 45°, 45° (viii) 15°, 75° (ix) 60°, 120°

10. ऐसा कोण खींचिए जोकि 35° के कोण का संपूरक हो।

11. एक कोण अपने पूरक के बराबर है। कोण का परिमाण क्या है ?

12. एक कोण अपने संपूरक के बराबर है। कोण का परिमाण क्या है ?

13. क्या निम्न कथन सत्य हैं ?

   (क) यदि दो कोण रैखिक युग्म बनाते हैं तो उनका योग 180° है।

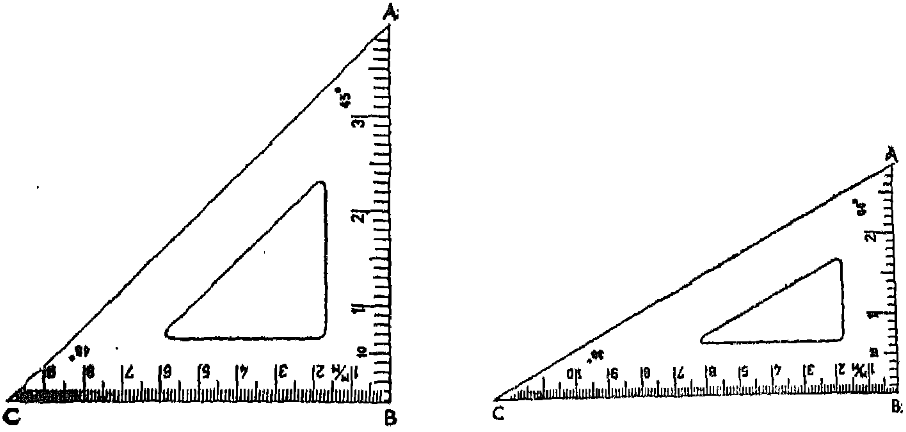
   (ख) यदि दो कोणों का योग 180° हो तो वे एक रैखिक युग्म बनाते हैं।

14. रैखिक युग्म का एक कोण अधिक कोण है। आप दूसरे कोण के बारे में क्या कह सकते हैं ?

15. रैखिक युग्म का एक कोण 48° का है। दूसरा कोण ज्ञात कीजिए।

12.8 सेट स्क्वायर

आपने अपने ज्यामिति बक्स में दो त्रिभुजाकार उपकरण (*tools*) देखे होंगे। इनके चित्र नीचे आकृति 12.26 में दिए हैं।



आकृति 12.26: सेट स्क्वायर

ये **सेट स्क्वायर** (*set squares*) कहलाते हैं। एक सेट स्क्वायर के कोण 45°, 90° और 45° हैं तथा दूसरे के 60°, 90°, और 30°। अपने चाँदे से इसकी जाँच कीजिए। कुछ अन्य कोणों तथा साथ ही लम्ब (*perpendicular*) और समांतर रेखाएँ खींचने में सेट स्क्वायर का प्रयोग किया जा सकता है। ये धातु या लकड़ी या पारदर्शक प्लास्टिक के बने होते हैं तथा प्राय: कुछ मिलीमीटर मोटाई के होते हैं। कभी कभी समकोण वाले दोनों किनारे अंशांकित भी होते हैं। एक किनारा सेंटीमीटरों में तथा दूसरा किनारा इंचों में अंशांकित होता है। ऐसे सेट स्क्वायर का रेखाखंडों की लम्बाइयाँ मापने में भी प्रयोग किया जा सकता है।

हम आकृति 12.26 (i) के सेट स्क्वायर को **45° सेट स्क्वायर** तथा आकृति 12.26 (ii) के सेट स्क्वायर को **30° सेट स्क्वायर** कह सकते हैं।

प्रश्नावली 12.4

1. अपने सेट स्क्वायर के किनारे मापिए। आकृति 12.26 के अनुसार उनके नाम लिखकर जाँच कीजिए कि 45° सेट स्क्वायर में $AB = BC$ है तथा 30° सेट स्क्वायर में $AC = 2AB$ है।

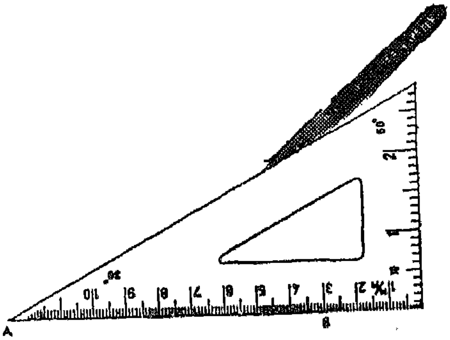
12.9 विभिन्न रचनाओं में सेट स्क्वायर का उपयोग

$30°$, $45°$, $60°$ तथा $90°$ के कोण दोनों सेट स्क्वायर में से एक या दूसरे का प्रयोग करके तुरन्त ही खींचे जा सकते हैं। उदाहरणार्थ $30°$ का कोण हम निम्न चरणों में खींचते हैं :

चरण 1 : हम $30°$ सेट स्क्वायर को कागज़ पर एक उपयुक्त स्थिति में रखते हैं जैसा कि आकृति 12.27 में दिखाया गया है।

चरण 2 : हम एक हाथ से सेट स्क्वायर को कस कर पकड़े रहते हैं तथा दूसरे हाथ से एक नुकीली पेंसिल की सहायता से $30°$ कोण वाले दोनों किनारों के अनुदिश दो किरणें AB और AC खींचते हैं।

तब, $\angle BAC$ वांछित कोण हैं।

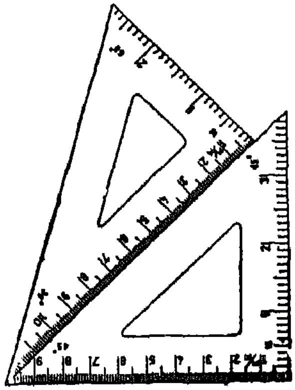


आकृति 12.27

प्रश्नावली 12.5

1. सेट स्क्वायर की सहायता से $45°$, $60°$ तथा $90°$ के कोण खींचिए।

2. $75°$ के कोण की रचना कीजिए।
[संकेत : $75° = 45° + 30°$, आकृति 12.28 भी देखिए।]



आकृति 12.28

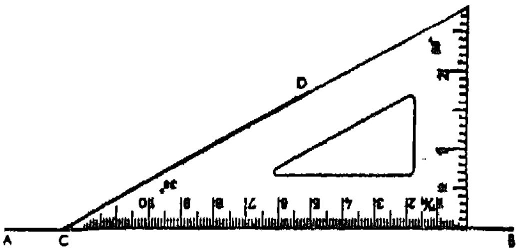
3. 105° के कोण की रचना कीजिए।

4. 15° के कोण की रचना कीजिए। [संकेत: $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$]

हम सेट स्क्वायर की सहायता से, एक दी हुई रेखा से, उस पर एक दिए हुए बिंदु पर भी कोई कोण, मान लीजिए 30°, बना सकते हैं। माना AB दी हुई रेखा है और C उस पर स्थित कोई बिंदु दिया है। हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं:

चरण 1: हम 30° सेट स्क्वायर को इस प्रकार रखते हैं कि 30° कोण की एक भुजा AB के अनुदिश रहे तथा उसका शीर्ष C पर रहे।

चरण 2: हम एक हाथ से सेट स्क्वायर को कस कर पकड़े रहते हैं तथा दूसरे हाथ से एक नुकीली पेंसिल की सहायता से 30° कोण की दूसरी भुजा के अनुदिश किरण CD खींचते हैं। (देखिए आकृति 12.29) तब, $\angle BCD$ वांछित कोण है?



आकृति 12.29

यह देखा जा सकता है कि यह विधि अधिक उपयुक्त नहीं है क्योंकि सेट स्क्वायर के कोने प्राय: टूटे और घिसे हुए होते हैं। ऐसी दशा में न तो सेट स्क्वायर के 30° कोने को ठीक प्रकार से C पर रखना संभव है और न ही सही तरीके से किरण CD खींचना इतना सरल है।

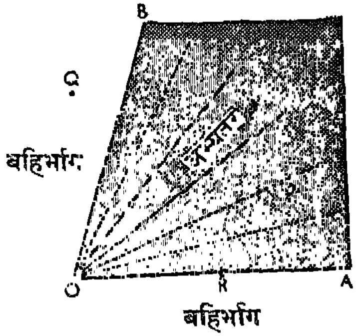
प्रश्नावली 12.6

1. सेट स्क्वायर की सहायता से एक दी हुई रेखा के दिए हुए बिंदु पर निम्न कोण खींचिए:
   (i) 45° (ii) 60° (iii) 90°

हम लम्ब और समांतर रेखाएँ खींचने में सेट स्क्वायर के उपयोग के बारे में अगले एकक में बताएंगे।

12.10 कोण का अभ्यंतर और बहिर्भाग

मान लीजिए AOB कोई कोण है। किरणें OA और OB तल के (सभी) बिंदुओं को तीन भागों में विभाजित करती हैं। **पहला** ऐसे बिंदु P जो कि O के चारों ओर किरण OA द्वारा स्थिति OA से OB तक घूमने में बनी किसी किरण पर स्थित होते हैं जैसा कि आकृति 12.30 में दिखाया गया है। **दूसरा**, Q की तरह के बिंदु जो कि किसी ऐसी किरण पर स्थित नहीं होते तथा **तीसरा** R की तरह के बिंदु जो कि कोण की किसी एक भुजा अर्थात् OA या OB पर स्थित होते हैं।



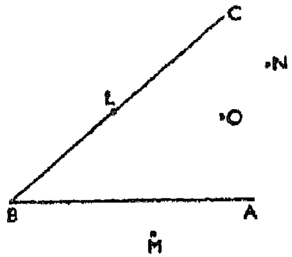
आकृति 12.30

तल का वह भाग या क्षेत्र जिसमें ऐसे सभी बिंदु P स्थित हैं, $\angle AOB$ का **अभ्यंतर** (*interior*) कहलाता है। वह क्षेत्र जिसमें ऐसे सभी बिंदु Q स्थित हैं, $\angle AOB$ का **बहिर्भाग** (*exterior*) कहलाता है। भुजाओं OA और OB से दोनों क्षेत्रों की **उभयनिष्ठ सीमा** (*common boundary*) बनती है।

हम देखते हैं कि यदि हमें P से Q या Q से P तक जाना हो तो हमें OA या OB में से एक भुजा को अवश्य पार करना पड़ेगा। दूसरे शब्दों में, कोण की भुजाएँ उसके अभ्यंतर को उसके बहिर्भाग से पृथक करती हैं।

प्रश्नावली 12.7

1. आकृति 12.31 में बिंदुओं L, M, O तथा N में से कौन से बिंदु $\angle ABC$ के अभ्यंतर में स्थित हैं? कौन से बहिर्भाग में?



आकृति 12.31

2. क्या कोण का शीर्ष अभ्यंतर में स्थित होता है? क्या बहिर्भाग में स्थित होता है?

3. **किसी कोण को दो बराबर आसन्न कोणों में विभाजित करने वाली किरण को कोण का समद्विभाजक** (*bisector*) **कहते हैं।** क्या किसी कोण का समद्विभाजक पूरी तरह से उसके अभ्यंतर में स्थित होता है? क्या यह बहिर्भाग में स्थित है?

[संकेत : उपर्युक्त प्रश्न 2 का अध्ययन कीजिए।]

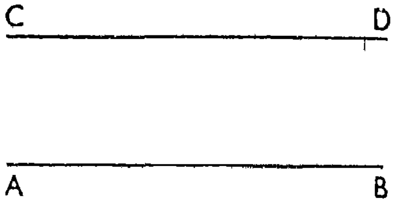
एकक XIII

समांतर रेखाएँ

13.1 समांतर रेखाएँ

आपको याद होगा कि तल में जो रेखाएँ कभी नहीं मिलतीं, चाहे उन्हें किसी भी दिशा में कितना ही बढ़ाया जाएं, **समांतर रेखाएँ** (*parallel lines*) कहलाती हैं। ब्लैकबोर्ड के सम्मुख किनारे, आयताकार मेज की ऊपरी सतह के सम्मुख किनारे, आपके कक्ष के सम्मुख किनारे, आपकी पुस्तक के सम्मुख किनारे, आपके रूलर के सम्मुख किनारे इत्यादि सब समांतर रेखाओं के युग्मों के उदाहरण हैं।

मान लीजिए AB और CD दो समांतर रेखाएँ हैं। (देखिए आकृति 13.1) हम AB, CD के समांतर है, व्यक्त करने के लिए $AB \parallel CD$ लिखते हैं। हम इसे $CD \parallel AB$ भी लिख सकते हैं।

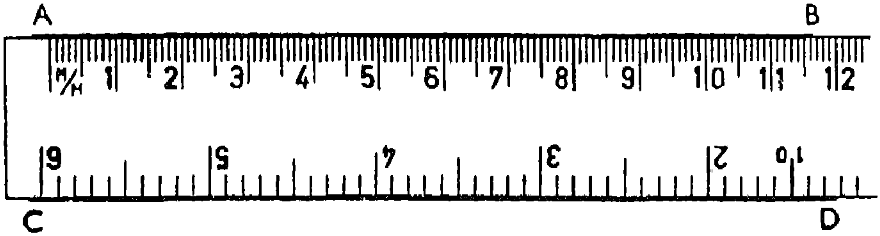


आकृति 13.1

आइए अब समांतर रेखाओं के एक महत्वपूर्ण गुण को देखें। हम निम्न प्रयोगों पर विचार करते हैं।

प्रयोग 1

आइए कागज़ के पन्ने पर अपना रूलर रखें और एक नुकीली पेंसिल से रूलर के दोनों सम्मुख किनारों के अनुदिश दो रेखाएँ AB और CD खींचे। अब रूलर की सहायता से दोनों रेखाओं को दाईं ओर की तरफ जितना हो सके उतना बढ़ाएँ। क्या ये रेखाएँ कहीं मिलती हैं?



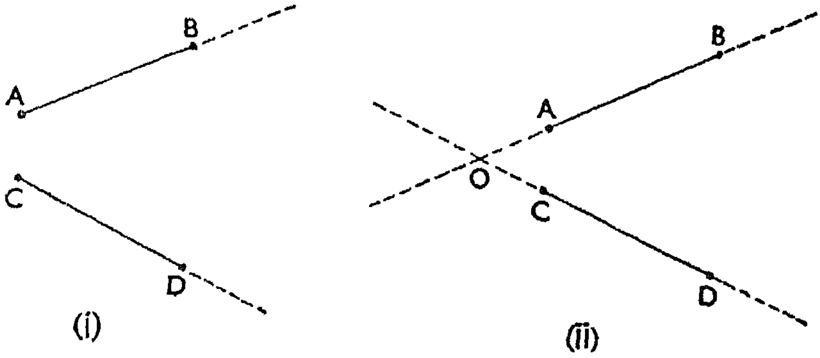
आकृति 13.2

पुन: अब रेखाओं को बाईं ओर की तरफ जितना हो सके उतना बढ़ाएँ। क्या ये रेखाएं कहीं मिलती हैं?

अतः हम देखते हैं कि दोनों रेखाओं के बीच की दूरी प्रत्येक जगह रूलर की चौड़ाई के बराबर है।

प्रयोग 2

आइए दो रेखाएँ AB और CD लें तथा उन्हें दाईं ओर की तरफ बढ़ाएँ। [देखिए आकृति 13.3(i)] क्या दोनों रेखाएँ अधिकाधिक अलग होती जाती हैं?



आकृति 13.3

अब इन्हें बाईं ओर की तरफ बढ़ाएँ। [देखिए आकृति 13.3 (ii)] क्या दोनों रेखाएँ परस्पर समीप आती जाती हैं?

हम देखते हैं कि ये एक बिंदु O पर मिलती हैं। यदि इन्हें और आगे बढ़ाएँ तो क्या होता है? क्या ये पुनः अलग होना प्रारम्भ कर देती हैं?

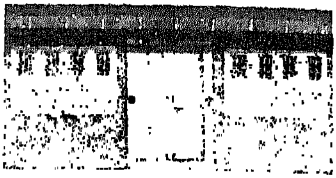
हम उपर्युक्त दो प्रयोगों से देखते हैं कि

यदि दो रेखाएँ समांतर हों तो प्रत्येक जगह ये एक दूसरे से समान 'दूरी' पर होती हैं। दूसरे शब्दों में हम दो समांतर रेखाओं के बीच की 'दूरी' का अस्तित्व मान सकते हैं।

यदि रेखाएँ समांतर न हों तो उनके बीच की कोई स्थिर दूरी नहीं होती। ये ऐसी दो सड़कों की तरह हैं जो कि चौराहे पर मिलने के पश्चात् पुनः अलग होना शुरू हो जाती हैं।

प्रश्नावली 13.1

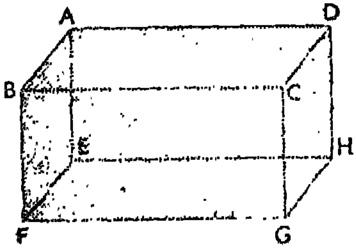
1. आकृति 13.4 में हम एक दरवाजे और दो खिड़कियों वाली दीवार का चित्र देखते हैं। किन्हीं पाँच समांतर रेखाओं के युग्मों के नाम लिखिए।



आकृति 13.4

2. अपने आस पास की वस्तुओं में समांतर रेखाओं के युग्मों के पाँच उदाहरण दीजिए।

3. आकृति 13.5 में आप लकड़ी का एक आयताकार ब्लाक देख रहे हैं। किनारों BC और FG को बढ़ाइए। चाहे इन्हें कितना भी बढ़ाया जाए ये किनारे कभी नहीं मिलते। क्या ये समांतर हैं? कुछ अन्य समांतर किनारों के युग्म बताइए।

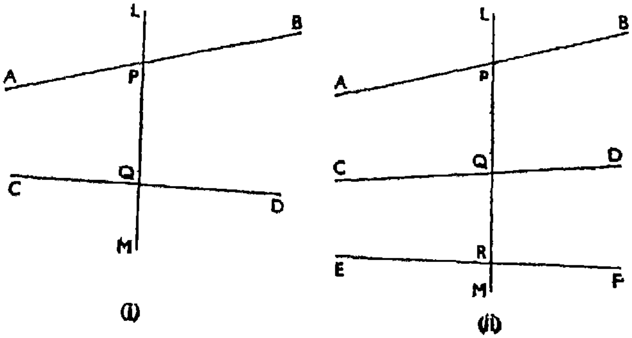


आकृति 13.5

13.2 तिर्यक रेखा

आकृति 13.6(i) में AB और CD दो रेखाएँ हैं तथा एक अन्य रेखा LM उन्हें दो विभिन्न बिंदुओं P और Q पर काटती है। आकृति 13.6(ii) में AB, CD और EF तीन रेखाएँ हैं तथा एक अन्य रेखा LM उन्हें तीन विभिन्न बिंदुओं P, Q और R पर काटती है। प्रत्येक स्थिति में LM अन्य रेखाओं की **तिर्यक रेखा** (*transversal*) कहलाती है।

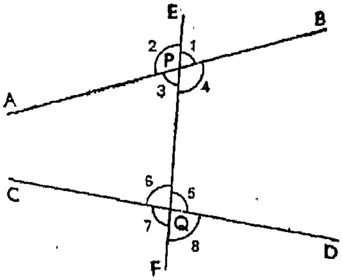
वह रेखा जो दो या दो से अधिक दी हुई रेखाओं को विभिन्न बिंदुओं पर काटती है तिर्यक रेखा कहलाती है। दी हुई रेखाएँ समांतर भी हो सकती हैं और असमांतर भी। परन्तु इन सभी रेखाओं के तिर्यक रेखा के साथ प्रतिच्छेद बिंदु **अवश्य** ही भिन्न भिन्न होने चाहिए।



आकृति 13.6

13.3 दो रेखाओं से तिर्यक रेखा द्वारा बनाए गए कोण

आकृति 13.7 में AB और CD दो रेखाएँ हैं और तिर्यक रेखा EF इन्हें क्रमशः बिंदुओं P और Q पर काटती है। रेखाओं AB और CD से तिर्यक रेखा आठ कोण बनाती है। इन कोणों को आकृति में 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 लिखा गया है। क्या आप इन कोणों के पूरे नाम बता सकते हैं?



आकृति 13.7

कोण 1, 2, 7 और 8 तिर्यक रेखा द्वारा दोनों रेखाओं से बनाए गए **बाह्य कोण** (*exterior angles*) कहलाते हैं। कोण 3, 4, 5 और 6 **अंतः कोण** (*interior angles*) कहलाते हैं।

कोणों 1 और 5 से **संगत कोणों** (*corresponding angles*) का एक युग्म बनता है। इसी प्रकार 2 और 6, 3 और 7, 4 और 8 भी संगत कोणों के युग्म हैं।

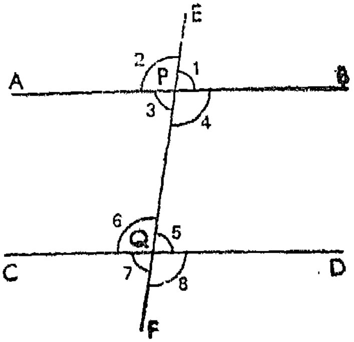
कोणों 3 और 5 से **अंतः एकांतर कोणों** (*alternate interior angles*) का एक युग्म बनता है। इन्हें केवल **एकांतर कोण** (*alternate angles*) भी कहते हैं। इसी प्रकार 4 और 6 भी एकांतर कोणों का युग्म है।

प्रश्नावली 13.2

1. आकृति 13.7 में निम्न कोणों के संगत कोण लिखिए :
   (i) $\angle APE$ (ii) $\angle QPB$
2. आकृति 13.7 में $\angle APQ$ के एकांतर कोण का नाम बताइए।

13.4 दो समांतर रेखाओं से तिर्यक रेखा द्वारा बनाए गए कोण

आइए निम्न प्रयोग को देखें :



आकृति 13.8

चरण 1 : अपने रूलर को कागज़ के पन्ने पर रखें और उसके सम्मुख किनारों के अनुदिश दो रेखाएँ AB और CD खींचें। रूलर को हटाने पर हमें दो समांतर रेखाएँ AB और CD प्राप्त हो जाती हैं।

चरण 2 : अब एक तिर्यक रेखा EF खींचें जो कि AB और CD को क्रमशः P और Q पर काटे। साथ ही, तिर्यक रेखा द्वारा दोनों रेखाओं से बनाए गए आठों कोणों को 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 और 8 से निरूपित करें जैसा कि आकृति 13.8 में दिखाया गया है।

चरण 3 : अब चाँदे से एकांतर कोणों 3 और 5 को मापें। क्या ये बराबर हैं? एकांतर कोण 4 और 6 भी मापें। हमें क्या ज्ञात होता है?

चरण 4 : पुनः आइए संगत कोणों 1 और 5 को मापें। क्या ये बराबर हैं? संगत कोण 4 और 8 भी मापें। हमें क्या ज्ञात होता है? इसी प्रकार संगत कणों के अन्य दो युग्म भी मापें। हमें क्या ज्ञात होता है?

चरण 5 : अब अंतः कोणों 4 और 5 जोकि तिर्यक रेखा के एक ही ओर हैं, को मापें। क्या इनका योग 180° है? पुनः अंतः कोण 3 और 6 मापें और उनका योग ज्ञात करें। हम क्या देखते हैं?

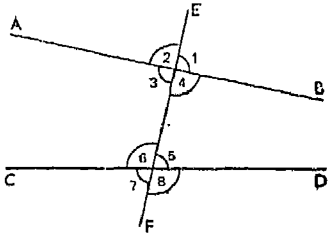
आइए इस प्रयोग को समांतर रेखाओं के एक अन्य युग्म और उनकी तिर्यक रेखा के साथ दोहराएँ।

हमें दो समांतर रेखाओं से उनकी तिर्यक रेखा द्वारा बनाए गए कोणों के निम्न गुण प्राप्त होंगे।

यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को काटे तो (i) एकांतर कोणों के युग्म बराबर होते हैं (देखिए चरण 3), (ii) संगत कोणों के युग्म बराबर होते हैं (देखिए चरण 4), (iii) तिर्यक रेखा

के एक ही ओर के अंतः कोणों का योग 180° होता है (देखिए चरण 5)। दूसरे शब्दों में, तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण संपूरक होते हैं।

अब इस प्रयोग को दो असमांतर रेखाओं AB तथा CD और उनकी तिर्यक रेखा EF के साथ दोहराएँ। (देखिए आकृति 13.9) आइए कोणों 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 और 8 को मापें। हम देखते हैं कि संगत कोणों के युग्म 1, 5; 2, 6; 4, 8 या 3, 7 में से कोई भी युग्म बराबर नहीं है। एकांतर कोणों के युग्म 3, 5 या 4, 6 में से कोई भी युग्म बराबर नहीं है। अंत में, कोणों 4 और 5 या 3 और 6 का योग 180° नहीं है। इस प्रकार हम देखते हैं कि यदि रेखाएँ समांतर न हों तो (i), (ii) तथा (iii) में से कोई भी गुण सत्य नहीं होगा। दूसरे शब्दों में, यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को काटे तथा (i), (ii) या (iii) में से कोई एक भी गुण सत्य हो तो दोनों रेखाएँ समांतर होती हैं।

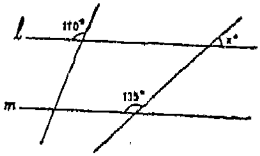


आकृति 13.9

हम इनमें से कुछ गुणों का बिना इनका नाम विशेष बताए लम्ब और समांतर रेखाएँ खींचने में उपयोग करेंगे।

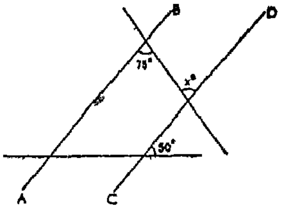
प्रश्नावली 13.3

1. आकृति 13.10 में, l और m दो समांतर रेखाएँ हैं। x का मान ज्ञात कीजिए।



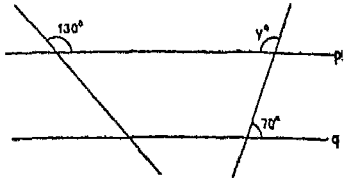
आकृति 13.10

2. आकृति 13.11 में, AB और CD समांतर हैं। x का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.11

3. आकृति 13.12 में p और q समांतर हैं। y का मान ज्ञात कीजिए।

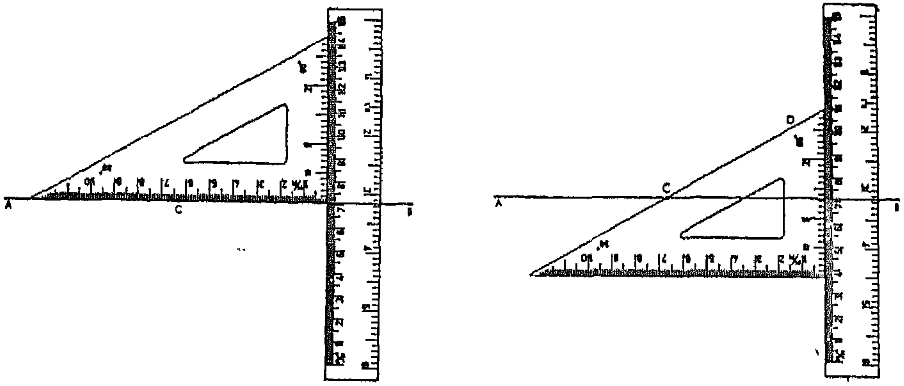


आकृति 13.12

13.5 सेट स्क्वायर से कुछ और रचनाएँ

13.5.1 एक दी हुई रेखा से उसके एक दिए हुए बिंदु पर एक कोण, माना 30°, बनाना

माना दी हुई रेखा AB है तथा उस पर दिया हुआ बिंदु C है।



(i) आकृति 13.13 (ii)

हम यह निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : आइए 30° सेट स्क्वायर को आकृति 13.13 (i) के अनुसार रखें जिससे 30° कोण की एक भुजा रेखा AB के अनुदिश रहे। तब बिंदु C भी इसी भुजा पर स्थित होगा।

चरण 2 : अब सेट स्क्वायर को कसकर पकड़े रहें तथा 30° के सामने वाले किनारे के अनुदिश एक रूलर रखें। (रूलर के स्थान पर हम दूसरे सेट स्क्वायर का प्रयोग भी कर सकते हैं।)

चरण 3 : अब रूलर को स्थिर रखते हुए सेट स्क्वायर को रूलर के अनुदिश तब तक सरकाएँ जब तक कि यह ऐसी स्थिति में न आ जाए कि C, 30° कोण की दूसरी भुजा पर स्थित हो। [देखिए आकृति 13.13 (ii)]

चरण 4 : अंत में सेट स्क्वायर को इस स्थिति में स्थिर रखते हुए उसके किनारे के अनुदिश किरण CD खींचें।

तब $\angle BCD$ वांछित कोण है।

हम देखते हैं कि इस रचना में हमें सेट स्क्वायर के कोनों का प्रयोग नहीं करना पड़ा। इस प्रकार यदि सेट स्क्वायर के कोने टूटे हुए हों तो भी कोण की रचना की जा सकती है।

प्रश्नावली 13.4

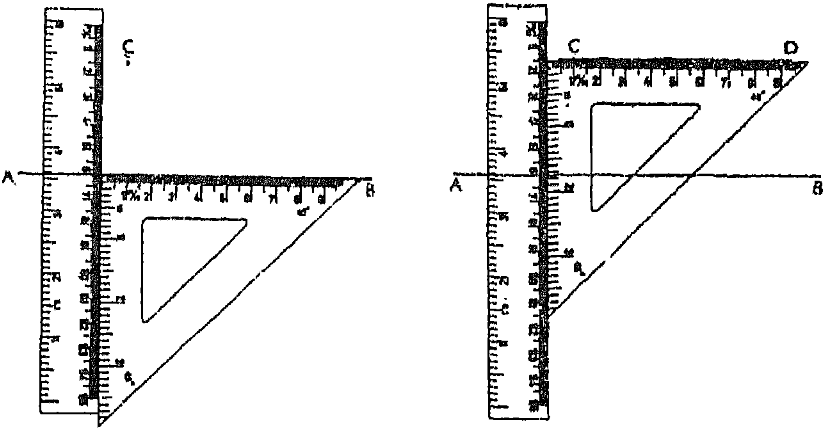
1. अनुच्छेद 13.5.1 की विधि का प्रयोग करते हुए एक दी हुई रेखा के दिए हुए बिंदु पर निम्न कोणों की रचना कीजिए :

(i) 45° (ii) 60° (iii) 90°

13.5.2 एक दी हुई रेखा के समांतर उस पर न स्थित एक दिए हुए बिंदु से होकर एक रेखा खींचना

माना दी हुई रेखा AB है तथा C उसके बाहर कोई बिंदु है। हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : आइए दोनों में से किसी भी सेट स्क्वायर को इस प्रकार रखें कि समकोण की एक भुजा AB के अनुदिश रहे। [देखिए आकृति 13.14 (i)]



(i) आकृति 13.14 (ii)

चरण 2 : अब सेट स्क्वायर को पकड़े रहें तथा रूलर (या दूसरे सेट स्क्वायर) को समकोण की दूसरी भुजा के अनुदिश रखें।

चरण 3 : अब रूलर को कसकर पकड़े हुए, सेट स्क्वायर को रूलर के अनुदिश तब तक सरकाएँ जब तक कि वह ऐसी स्थिति में न आ जाए कि बिंदु C समकोण की पहली भुजा पर स्थित हो। [देखिए आकृति 13.14 (ii)]

चरण 4 : अंत में सेट स्क्वायर को इस स्थिति में स्थिर रखते हुए C से होकर इस किनारे के अनुदिश रेखा CD खींचें।

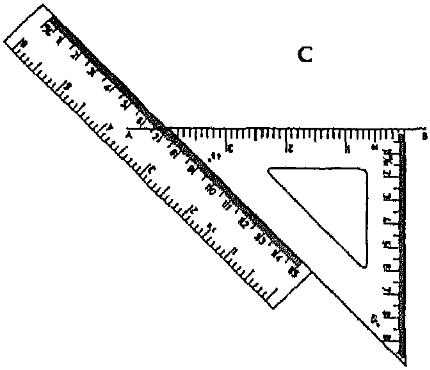
तब CD ही, C से होकर जाने वाली तथा AB के समांतर वांछित रेखा है।

13.5.3 एक दी हुई रेखा पर उस पर न स्थित एक दिए हुए बिंदु से लम्ब खींचना

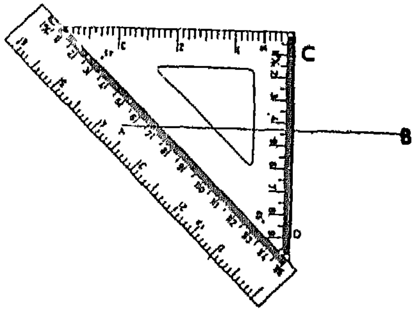
जब दो रेखाएँ एक दूसरे से $90°$ का कोण बनाती हैं तो वे **परस्पर लम्ब** (*perpendicular*) या **समकोण पर** (*at right angles*) कहलाती हैं। हम लम्ब को संकेत '$\perp$' से व्यक्त करते हैं।

माना AB दी हुई रेखा है और C उसके बाहर कोई बिंदु है। हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : आइए दोनों में से किसी भी सेट स्क्वायर को इस प्रकार रखें कि समकोण की एक भुजा AB के अनुदिश रहे। [देखिए आकृति 13.15 (i)]



(i)



(ii)

आकृति 13.15

चरण 2 : अब सेट स्क्वायर को कसकर पकड़े रहें तथा एक रूलर (या दूसरे सेट स्क्वायर के सबसे लम्बे किनारे) को इस सेट स्क्वायर के समकोण के सामने वाले किनारे के अनुदिश रखें।

चरण 3 : अब रूलर को कसकर पकड़े हुए, सेट स्क्वायर को रूलर के अनुदिश तब तक सरकाएँ जब तक कि वह ऐसी स्थिति में न आ जाए कि C समकोण की दूसरी भुजा पर स्थित हो। [देखिए आकृति 13.15 (ii)]

चरण 4 : अंत में सेट स्क्वायर को इस स्थिति में स्थिर रखते हुए C से होकर इस किनारे के अनुदिश रेखा CD खींचें।

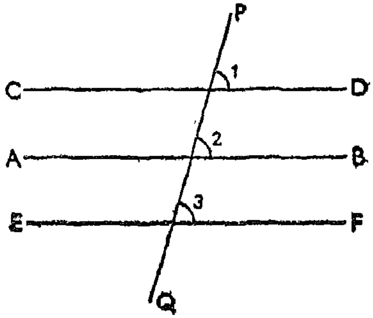
तब CD ही AB पर C से होकर वांछित लम्ब रेखा है।

प्रश्नावली 13.5

1. एक रेखाखंड AB खींचिए तथा इसके विपरीत ओर बिंदु C और E लीजिए। C से होकर $CD \parallel AB$ खींचिए तथा E से होकर $EF \parallel AB$ खींचिए। सेट स्क्वायर की सहायता से जाँच कीजिए कि $CD \parallel EF$ है।

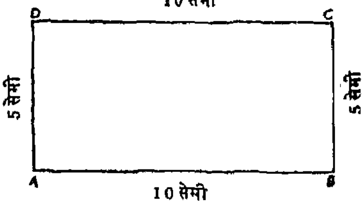
आप क्या देखते हैं? एक **ही रेखा के समांतर रेखाएँ परस्पर समांतर** होती हैं।

2. समांतर रेखाओं CD, AB और EF की एक तिर्यक रेखा खींचिए। (देखिए आकृति 13.16) कोणों को 1, 2 तथा 3 लिखिए और उन्हें मापिए। क्या ये बराबर हैं?



आकृति 13.16

3. 10 सेमी का एक रेखाखंड AB लीजिए। A से होकर $AD \perp AB$ इस प्रकार खींचिए कि $AD = 5$ सेमी हो। D से होकर $DC \parallel AB$ इस प्रकार खींचिये कि $DC = 10$ सेमी हो। C और B को जोड़िए। (देखिए आकृति 13.17) तब $ABCD$ एक **आयत** होगा जिसकी भुजाएँ 10 सेमी और 5 सेमी हैं।



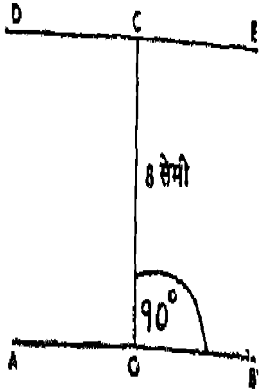
आकृति 13.17

4. 8.5 सेमी तथा 5.6 सेमी भुजाओं वाला एक आयत खींचिए।

5. 10 सेमी की भुजा का एक वर्ग खींचिए।

6. स्केल 1 मीटर = 1 सेमी का प्रयोग करते हुए 5 मीटर चौड़ी एक सीधी सड़क का चित्र बनाइए।

[प्रश्न में तात्पर्य यह है कि सड़क के किनारे समांतर हैं तथा प्रत्येक जगह उनकी परस्पर दूरी 5 सेमी है। चूँकि स्केल 1 मीटर = 1 सेमी है अतः हमें 5 सेमी की दूरी पर दो समांतर रेखाएँ खींचनी हैं।



हम कोई रेखा AB और उस पर एक बिंदु O लेते हैं। अब हम AB पर लम्ब OC इस प्रकार खींचते हैं कि $OC=5$ सेमी हो। C से होकर हम $DE \perp AB$ खींचते हैं। (देखिए आकृति 13.18)

दोनों रेखाएं AB और DE ही सड़क का चित्र है।]

आकृति 13.18

7. स्केल 1 मीटर=1 सेमी का प्रयोग करते हुए 6 मीटर चौड़ी सीधी सड़क का चित्र खींचिए।

8. एक आयताकार कमरे के फर्श का चित्र खींचिए जिसकी लम्बाई और चौड़ाई क्रमश: 6 मीटर और 4 मीटर हैं। स्केल 1 मीटर=1 सेमी का प्रयोग कीजिए।

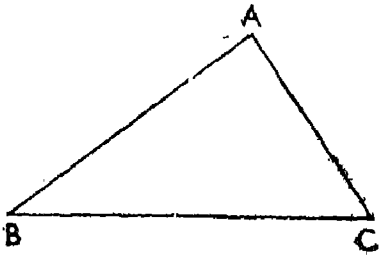
9 स्केल 10 मीटर=1 सेमी का प्रयोग करते हुए 100 मीटर लम्बे और 75 मीटर चौड़े एक आयताकार खेत का चित्र बनाइए।

एकक XIV

त्रिभुज

14.1 त्रिभुज

आइए आकृति 14.1 को देखें। क्या आप इस आकृति का नाम बता सकते हैं? यह एक त्रिभुज (*triangle*) है। आइए हम त्रिभुजों का पुनरावलोकन करें तथा उनके कुछ और तथ्यों का अध्ययन करें।



आकृति 14.1 : त्रिभुज

त्रिभुज तीन असंरेखी बिंदुओं जैसे, B, C और A को जोड़ने से प्राप्त रेखाखंडों BC, CA और AB से बनता है। (देखिए आकृति 14.1) इस प्रकार हमें त्रिभुज ABC प्राप्त होता है। त्रिभुज शब्द को व्यक्त करने के लिए संकेत '$\triangle$' का प्रयोग किया जाता है। हम देखते हैं कि $\triangle ABC$ को $\triangle BCA$, $\triangle CAB$, $\triangle BAC$ इत्यादि भी कहा जा सकता है।

रेखाखंड BC, CA और AB इस त्रिभुज की **भुजाएँ** (*sides*) कहलाती हैं तथा इन रेखाखंडों की लम्बाइयाँ **भुजाओं की लम्बाइयाँ** कहलाती हैं। बिंदु A, B और C **शीर्ष** (*vertices*) कहलाते हैं। शीर्ष A भुजा BC के **सम्मुख** (*opposite*), शीर्ष B भुजा CA के **सम्मुख** तथा शीर्ष C भुजा AB के **सम्मुख** है।

तीनों रेखाखंडों BC, CA और AB से कितने (अंतः) कोण बनते हैं? स्पष्ट है, तीन कोण। ये कोण BAC, CBA तथा ACB हैं। इन्हें केवल $\angle A$, $\angle B$ तथा $\angle C$ से भी व्यक्त किया जा सकता है। $\angle A$ भुजा BC के **सम्मुख**, $\angle B$ भुजा CA के **सम्मुख** तथा $\angle C$ भुजा AB के **सम्मुख** है।

आकृति 14.1 में हम कह सकते हैं कि भुजा BC त्रिभुज का **आधार** (*base*) तथा सम्मुख कोण A **शीर्ष कोण** (*vertical angle*) है। परन्तु, वास्तव में त्रिभुज की किसी भी भुजा को आधार तथा उसके सम्मुख कोण को शीर्ष कोण माना जा सकता है।

भुजाओं की लम्बाइयों का योग अर्थात् $BC+CA+AB$, $\triangle ABC$ का **परिमाप** (*perimeter*) कहलाता है।

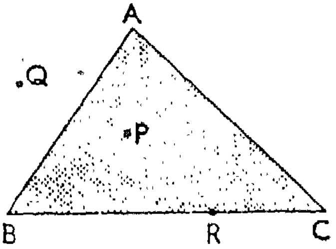
14.2 त्रिभुज का अभ्यंतर और बहिर्भाग

हम किसी घर या खेत के अभ्यंतर और बहिर्भाग के बारे बात किया करते हैं। हम यह भी कहा करते हैं कि फुटबाल का खिलाड़ी *D* के अंदर अर्थात् अभ्यंतर [प्रत्येक गोल (goal) के पास का अर्धवृत्ताकार क्षेत्र] में है।

आइए एक भूखंड और उसकी सीमा (boundary) पर विचार करें। सीमा के अंदर कोई भी वस्तु उसके अभ्यंतर में है तथा सीमा के बाहर कोई भी वस्तु उसके बहिर्भाग में है। यदि कोई व्यक्ति अभ्यंतर से बहिर्भाग या विलोमतः बहिर्भाग से अभ्यंतर में जाना चाहे तो उसे सीमा को अवश्य पार करना पड़ेगा।

हम कोण के अभ्यंतर और बहिर्भाग की चर्चा करते समय इन कल्पनाओं का पहले ही प्रयोग कर चुके हैं। अब हम त्रिभुज के लिए भी ऐसा ही करेंगे।

आइए कागज़ के पन्ने पर एक त्रिभुज *ABC* खींचें। त्रिभुज, तल के (सभी) बिंदुओं को तीन भागों में विभाजित करता है। **पहला** ऐसे बिंदु *P*, जिन्हें हम कहते हैं कि ये त्रिभुज के अंदर स्थित हैं। **दूसरा** ऐसे बिंदु *Q*, जिन्हें हम कहते हैं कि ये त्रिभुज के बाहर स्थित हैं। तथा **तीसरा** ऐसे बिंदु *R*, जो कि त्रिभुज की किसी एक भुजा पर स्थित हैं। (देखिए आकृति 14.2) तल का वह भाग जिसमें ऐसे सभी बिंदु *P* स्थित हैं **त्रिभुज का अभ्यंतर** (*interior of the triangle*) कहलाता है। *R* जैसे सभी बिंदु **अभ्यंतर की सीमा** (*boundary of the interior*) बनाते हैं। $\triangle ABC$ के अभ्यंतर और उस की सीमा को मिलाकर **त्रिभुजाकार क्षेत्र** (*triangular region*) कहा जाता है।



आकृति 14.2

तल का वह भाग जिसमें ऐसे सभी बिंदु *Q* स्थित हैं, **त्रिभुज का बहिर्भाग** (*exterior of the triangle*) कहलाता है। अब आकृति 14.2 में बिंदुओं *P* और *A* को देखें। ये *BC* के एक ही ओर स्थित हैं। *P* और *B* के बारे में आप क्या देखते हैं? *P* और *C* के बारे में आप क्या देखते हैं? हम देखेंगे कि अभ्यंतर के सभी बिंदु जैसे कि *P* त्रिभुज की प्रत्येक भुजा के उसी ओर स्थित हैं जिस ओर कि सम्मुख शीर्ष।

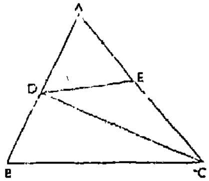
आइए अब बिंदुओं *Q* और *A* को देखें। ये *BC* के एक ही ओर स्थित हैं। इसी प्रकार बिंदु *Q* और *B*, *CA* के एक ही ओर स्थित हैं। परन्तु बिंदुओं *Q* और *C* के बारे में आप क्या देखते हैं? ये *AB* के विपरीत ओर स्थित हैं। इस प्रकार त्रिभुज के बहिर्भाग के बिंदु उसके अभ्यंतर के बिंदुओं से कुछ भिन्न प्रकार के हैं। क्या अब हम त्रिभुज के अभ्यंतर और बहिर्भाग को पहिचानने का कोई नियम बता सकते हैं? नियम है कि

त्रिभुज के अभ्यंतर के सभी बिंदु प्रत्येक भुजा के उसी ओर स्थित होते हैं जिस ओर कि सम्मुख शीर्ष।

हम यह भी देखते हैं कि हम त्रिभुज की एक भुजा को बिना पार किए (काटे) *P* से *Q* या *Q* से *P* तक नहीं पहुँच सकते।

प्रश्नावली 14.1

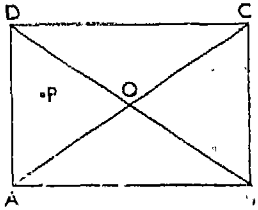
1. आकृति 14.3 में कितने विभिन्न त्रिभुज हैं ? प्रत्येक का नाम बताइए।



आकृति 14.3

2. आकृति 14.3 के कौन कौन से त्रिभुजों के बहिर्भाग में B स्थित हैं? कौन कौन से त्रिभुजों की कम से कम एक भुजा पर D स्थित है ?

3. आकृति 14.4 के सभी त्रिभुजों के नाम बताइए। इनमें से कौन से त्रिभुजों के अभ्यंतर में P स्थित है ? कौनसे त्रिभुजों के बहिर्भाग में A स्थित है ? कितने त्रिभुजों की कम से कम एक भुजा पर A स्थित है ? कितने त्रिभुजों की कम से कम एक भुजा पर B स्थित है ?



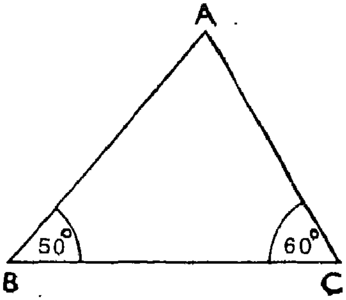
आकृति 14.4

14.3 त्रिभुज के कोणों का योग

14.3.1 एक नुकीली पेंसिल की सहायता से आइए अपने सेट स्कावायर की बाहरी रूप रेखा (*out lines*) खींचें। प्रत्येक एक त्रिभुज है। अब प्रत्येक त्रिभुज के कोणों को मापें। $30°$ सेट स्क्वायर से बने त्रिभुज के कोण $30°$, $90°$, और $60°$ होंगे। इन कोणों का योग क्या है ? $45°$ सेट स्क्वायर से बने त्रिभुज में कोणों का योग क्या है ? हम देखेंगे कि प्रत्येक त्रिभुज में कोणों का योग $180°$ है।

14.3.2 आइए एक त्रिभुज ABC बनाएं और उसके कोणों को चाँदे से मापें। इसके कोणों का योग क्या है ?

14.3.3 आइए एक रेखाखंड BC लें और बिंदु B पर $50°$ का एक कोण बनाएँ तथा C पर $60°$ का। (देखिए आकृति 14.5) हमें एक $\triangle ABC$ प्राप्त होता है। अब $\angle A$ को मापें ! $\angle A + \angle B + \angle C$ कितना है ?



आकृति 14.5

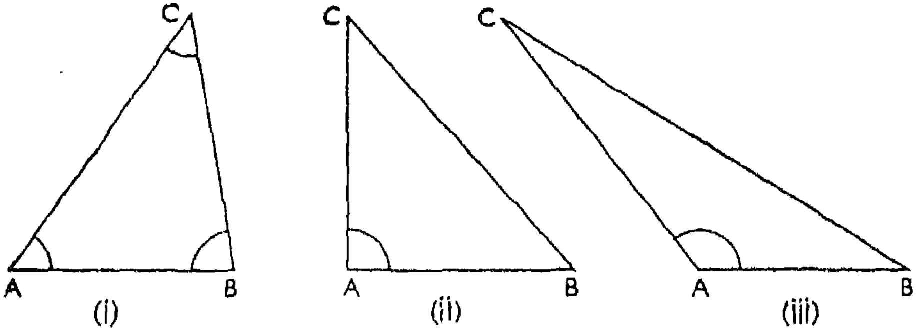
B और C पर विभिन्न कोण बनाकर, आइए इस प्रयोग को दोहराएँ तथा प्रत्येक स्थिति में तीनो कोणों का योग ज्ञात करें। हम देखेंगे कि

त्रिभुज के कोणों का योग 180° होता है।

14.4 न्यून कोण, समकोण और अधिक कोण त्रिभुज

हम त्रिभुजों का उनके कोणों के अनुसार निम्न प्रकार वर्गीकरण करते हैं :

वह त्रिभुज जिसके सभी कोण न्यून कोण हों **न्यून कोण त्रिभुज** (*acute triangle*) कहलाता है। [देखिए आकृति 14.6 (i)]



न्यूनकोण त्रिभुज   समकोण त्रिभुज   अधिककोण त्रिभुज

आकृति 14.6

वह त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण हो **समकोण त्रिभुज** (*right triangle*) कहलाता है। [देखिए आकृति 14.6 (ii)] दोनों सेट स्क्वायर समकोण त्रिभुजों के उदाहरण हैं।

अंत में, वह त्रिभुज जिसका एक कोण अधिक कोण हो **अधिक कोण त्रिभुज** (*obtuse triangle*) कहलाता है। [देखिए आकृति 14.6 (iii)]

प्रश्नावली 14.2

1. क्या आप एक से अधिक समकोण वाला एक त्रिभुज खींच सकते हैं ?
2. क्या आप एक से अधिक, अधिक कोण वाला एक त्रिभुज खींच सकते हैं ?

3. $\triangle ABC$ में

(i) $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$। $\angle C$ ज्ञात कीजिए।

(ii) $\angle A = \angle B = 60°$। $\angle C$ ज्ञात कीजिए।

(iii) $\angle A = 110°$, $\angle B = 40°$। $\angle C$ ज्ञात कीजिए।

(iv) $\angle B = 90°$, $\angle A = \angle C$। $\angle A$ और $\angle C$ ज्ञात कीजिए।

4. प्रश्न 3 में कौनसे त्रिभुज

(क) न्यून कोण त्रिभुज

(ख) समकोण त्रिभुज

(ग) अधिक कोण त्रिभुज

हैं ?

5. क्या निम्न कथन सत्य हैं ?

(i) किसी त्रिभुज के सभी कोण न्यून कोण हो सकते हैं।

(ii) किसी त्रिभुज का एक कोण समकोण तथा शेष कोण न्यून कोण हो सकते हैं।

(iii) किसी त्रिभुज के दो कोण समकोण और तीसरा कोण न्यून कोण हो सकता है।

(iv) किसी त्रिभुज में दो अधिक कोण हो सकते हैं।

6. एक त्रिभुज ABC खींचिए। AB को एक बिंदु D तक इस प्रकार बढ़ाइए कि B, A और D के मध्य स्थित हो। $\angle CBD$, $\angle ACB$ तथा $\angle CAB$ को मापिए तथा जाँच कीजिए कि $\angle CBD = \angle CAB + \angle ACB$

7. एक त्रिभुज ABC में $AB = 2.4$ सेमी, $AC = 1.8$ सेमी तथा $BC = 2.4$ सेमी है। उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

8. $\triangle ABC$ का परिमाप $\triangle DEF$ के परिमाप से दुगुना है। क्या $\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$ है ?

9. किसी त्रिभुज के कोण 1:2:3 के अनुपात में हैं। उसके कोण ज्ञात कीजिए। यह किस प्रकार का त्रिभुज है ?

10. किसी त्रिभुज के कोण 1 : 1: 2 के अनुपात में हैं। उसके कोण ज्ञात कीजिए

11. कोई त्रिभुज ABC खींचिए और AB का मध्य-बिंदु X मान लीजिए। $XY \parallel BC$ इस प्रकार खींचिए कि Y भुजा AC पर स्थित हो।

(i) AY और YC को मापिए और जांच कीजिए कि ये बराबर हैं।

(ii) XY और BC को मापिए और जाँच कीजिए कि $XY = \frac{1}{2} BC$

12. कोई त्रिभुज ABC खींचिए। BC को एक बिंदु E तक इस प्रकार बढ़ाइए कि C बिंदुओं B और E के मध्य स्थित हो। सेट स्क्वायर का प्रयोग करते हुए $CF \parallel BA$ खींचिए।

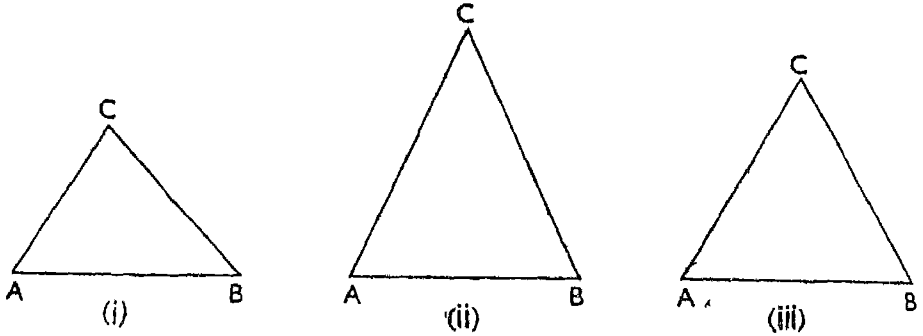
(i) $\angle BAC$ और $\angle ACF$ को मापिए तथा जाँच कीजिए कि ये बराबर हैं।

(ii) $\angle ABC$ और $\angle FCE$ को मापिए तथा जाँच कीजिए कि ये बराबर हैं।

14.5 विषमबाहु, समद्विबाहु और समबाहु त्रिभुज

हम त्रिभुजों का उनकी भुजाओं के अनुसार निम्न प्रकार वर्गीकरण करते हैं :

यदि त्रिभुज की सभी भुजाएँ लम्बाई में असमान हों तो वह **विषमबाहु त्रिभुज** (*scalene triangle*) कहलाता है। [देखिए आकृति 14.7 (i)] हम प्रायः इस नाम का प्रयोग नहीं करते क्योंकि अधिकतर जो त्रिभुज हम खींचते हैं या जो हमें देखने को मिलते हैं वे विषमबाहु ही होते हैं।



विषमबाहु त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज समबाहु त्रिभुज

आकृति 14.7

यदि त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर (समान) हों तो वह **समद्विबाहु त्रिभुज** (*isosceles triangle*) कहलाता है। [देखिए आकृति 14.7 (ii)]

यदि त्रिभुज की सभी भुजाएँ बराबर हों तो वह **समबाहु त्रिभुज** (*equilateral triangle*) कहलाता है। [देखिए आकृति 14.7 (iii)]

हम एकक XVI में देखेंगे कि विषमबाहु त्रिभुज के सभी कोण असमान होते हैं, समद्विबाहु त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं तथा यह कि समबाहु त्रिभुज के सभी कोण बराबर होते हैं।

14.6 त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग

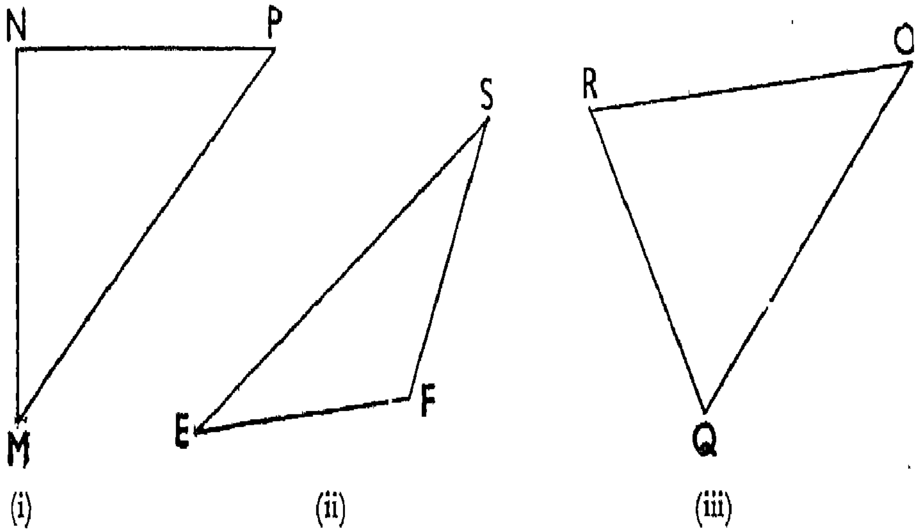
आइए एक त्रिभुज ABC खींचें और उसकी भुजाएँ मापें।

क्या $BC+CA>AB$ है? क्या $BC+AB>CA$ है? क्या $CA+AB>BC$ है?

अब इस प्रयोग को कुछ और त्रिभुजों के साथ दोहराएँ। आप क्या देखते हैं? हम देखेंगे कि **त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।**

प्रश्नावली 14.3

1. आकृति 14.8 में तीन समद्विबाहु त्रिभुज दिए हैं। उनकी बराबर भुजाओं के नाम बताइए।



आकृति 14.8

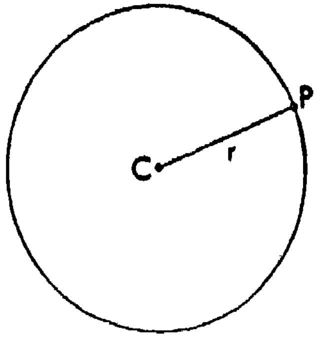
2. एक त्रिभुज की प्रत्येक भुजा, परिमाप की एक तिहाई है। यह त्रिभुज किस प्रकार का है?
3. एक समद्विबाहु त्रिभुज का एक कोण $120°$ है। अन्य दोनों कोण ज्ञात कीजिए।
4. एक समद्विबाहु त्रिभुज का एक कोण $90°$ है। अन्य दोनों कोण ज्ञात कीजिए।

एकक XV

वृत्त

15.1 वृत्त

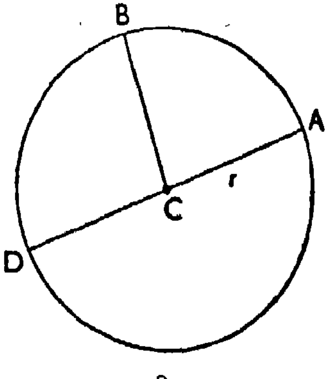
हम पिछली कक्षाओं में वृत्त से संबंधित अनेक संकल्पनाओं जैसे कि केन्द्र (*centre*), त्रिज्या (*radius*), वृत्तखंड (*segment of a circle*), त्रिज्यखंड (*sector*), उसका अभ्यंतर (*interior*) और बहिर्भाग (*exterior*) के बारे में पहले ही पढ़ चुके हैं। हम इस एकक में इनका संक्षेप में पुनरावलोकन करेंगे तथा कुछ और संकल्पनाओं का अध्ययन करेंगे। **वृत्त,** तल के ऐसे सभी **बिंदुओं से बना** होता है जो कि तल में एक दिए हुए बिंदु, मान लीजिए C, से समान दूरी, मान लीजिए r, पर हों। (देखिए आकृति 15.1) बिंदु C वृत्त का **केन्द्र** तथा दूरी r **त्रिज्या** कहलाती है। कभी कभी 'वृत्त' शब्द को संकेत '$\odot$' से भी व्यक्त किया जाता है।



आकृति 15.1 : वृत्त

मान लीजिए बिंदु A केन्द्र C और त्रिज्या r वाले किसी वृत्त पर स्थित है। C और A को जोड़िए। (देखिए आकृति 15.2) रेखाखंड CA जिसकी लम्बाई r है, भी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है। यह बेहतर होगा कि इस रेखाखंड को कोई दूसरा नाम दिया जाए।

त्रिज्य रेखाखंड (*radial segment*) एक अच्छा नाम होगा। परन्तु त्रिज्या शब्द का दो अर्थों में प्रयोग चिर प्रचलित है और हम इन्हीं प्रयोगों का अनुकरण करेंगे। हम देखते हैं कि दूरी r के अर्थ में वृत्त की केवल एक ही त्रिज्या है जबकि केन्द्र को वृत्त के किसी बिंदु से जोड़ने वाले रेखाखंड के अर्थ में चाहें जितनी त्रिज्याएँ हो सकती हैं।



आकृति 15.2

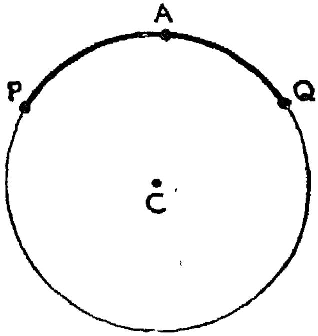
यदि वृत्त पर कोई अन्य बिंदु B स्थित हो तो रेखाखंड CB की वही लम्बाई होगी जो कि रेखाखंड CA की है। इस प्रकार CB, CA के बराबर है। हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि **वृत्त की सभी त्रिज्याएँ बराबर होती हैं।**

आइए, आकृति 15.2 में त्रिज्या AC को बढ़ाएँ जिससे वह वृत्त से पुन: D पर मिले। रेखाखंड AD, वृत्त का **व्यास** (*diameter*) कहलाता है। स्पष्ट है कि $AC=CD$। इस प्रकार व्यास $AD=2AC$।

दूसरे शब्दों में, **व्यास की लम्बाई $2r$ अर्थात् त्रिज्या की दुगुनी है।** हम केवल यह भी कह सकते हैं कि वृत्त का व्यास $2r$ है। वृत्त की परिमाप उसकी **परिधि** (*circumference*) कहलाती है।

15.2 चाप और जीवाएँ

माना केन्द्र C के किसी वृत्त पर P और Q दो बिंदु हैं। (देखिए आकृति 15.3) बिंदु P और Q वृत्त को दो भागों में विभाजित करते हैं। प्रत्येक भाग **चाप** (*arc*) कहलाता है।

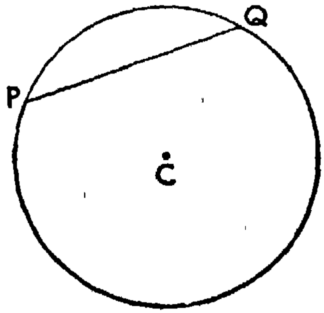


आकृति 15.3

उपर्युक्त आकृति में दोनों में से किसी भी भाग को चाप PQ कह सकते हैं। हम चाप PQ को व्यक्त करने के लिए संकेत $\widehat{PQ}$ का प्रयोग करते हैं। चूँकि यहाँ दो चाप PQ हैं, इसलिए हमारे कार्य में इससे कुछ भ्रम उत्पन्न हो सकता है। इस भ्रम से बचने के लिए हम वृत्त पर एक तीसरा बिंदु, मान लीजिए A, जैसा कि आकृति में दिखाया गया है अंकित कर लेते हैं और इस भाग को चाप PAQ अर्थात् $\widehat{PAQ}$ कहते हैं।

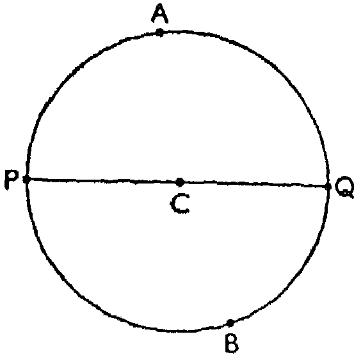
सामान्यत: दोनों चापों PQ में से एक, दूसरे चाप से बड़ा होता है। बड़ा चाप **दीर्घ चाप** (*major arc*) तथा छोटा चाप **लघु चाप** (*minor arc*) कहलाता है। इसका दोनों चापों की पहिचान करने में भी उपयोग किया जाता है।

यदि हम वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं P और Q को मिलाएँ तो रेखाखंड PQ वृत्त की **जीवा** (*chord*) कहलाती है। (देखिए आकृति 15.4) निस्संदेह, जब जीवा केन्द्र C से होकर जाए तो वह व्यास बन जाती है। (देखिए आकृति 15.5) दूसरे शब्दों में, वृत्त का व्यास वह जीवा है जो केन्द्र से होकर जाए।



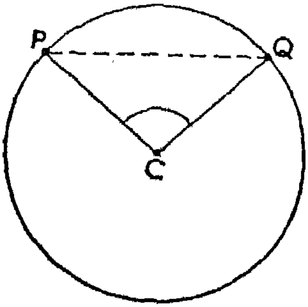
आकृति 15.4

वृत्त का व्यास जैसे कि PCQ वृत्त को दो बराबर चापों, मान लीजिए, PAQ और PBQ में विभाजित करता है। आकृति को व्यास PQ के अनुदिश मोड़ कर यह जाँच की जा सकती है कि दोनों चाप बराबर हैं। मोड़ने पर चाप PAQ ठीक चाप PBQ पर पड़ेगा। इनमें से प्रत्येक चाप **अर्धवृत्तीय चाप** (*semicircular arc*) या केवल **अर्धवृत्त** (*semicircle*) कहलाता है।



आकृति 15.5

माना C केन्द्र वाले वृत्त पर P और Q कोई दो बिंदु हैं। आइए P और C तथा Q और C को जोड़ें। (देखिए आकृति 15.6) हम कहते हैं कि **चाप PQ केन्द्र पर कोण PCQ बनाता है।** हम यह भी कह सकते हैं कि **जीवा PQ केन्द्र पर कोण PCQ बनाती है।** वृत्त का व्यास केन्द्र पर कैसा कोण बनाता है? स्पष्ट है, एक ऋजु कोण।



आकृति 15.6

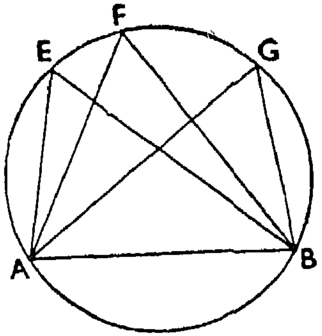
प्रश्नावली 15.1

1. निम्न त्रिज्याओं के वृत्त खींचिए :
   (क) 4 सेमी (ख) 2.6 सेमी (ग) 3.5 सेमी
2. निम्न व्यास वाले वृत्त खींचिए :
   (क) 6 सेमी (ख) 8.4 सेमी (ग) 5 सेमी
3. बताइए कि निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य।
   (क) वृत्त की सभी त्रिज्याएँ बराबर होती हैं।
   (ख) त्रिज्या, वृत्त की एक जीवा है।
   (ग) वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या का दुगुना होता है।
   (घ) एक वृत्त के दो केन्द्र हो सकते हैं।

4. केन्द्र O और 3.5 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए। दो त्रिज्याएँ OA और OB इस-प्रकार खींचिए कि $\angle AOB = 60°$ हो। (चाँदे का प्रयोग कीजिए) A और B को जोड़िए और जीवा AB मापिए। क्या $\triangle OAB$ समबाहु त्रिभुज है?

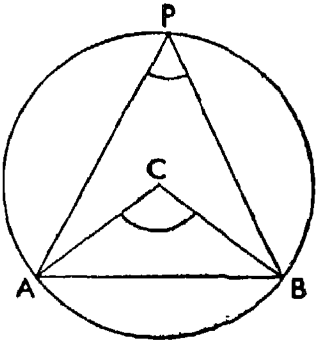
5. C को केन्द्र मानकर किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। कोई तीन जीवाएँ खींचिए जो केन्द्र से होकर न जाएँ। साथ ही वृत्त का एक व्यास भी खींचिए। व्यास और प्रत्येक जीवा की लम्बाई मापिए। कौन सबसे लम्बा है? हम देखेंगे कि **व्यास, वृत्त की सबसे लम्बी जीवा है।**

6. किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त और उसकी एक जीवा AB खींचिए जैसा कि आकृति 15.7 में दिखाया गया है। माना जीवा के एक ही ओर वृत्त पर तीन बिंदु E, F और G हैं। इन बिंदुओं को A और B से मिलाइए। $\angle AEB$, $\angle AFB$ और $\angle AGB$ मापिए। क्या ये बराबर हैं?



आकृति 15.7

7. C केन्द्र मानकर किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। मान लीजिए AB कोई जीवा है और P वृत्त पर स्थित कोई बिंदु है जैसा कि आकृति 15.8 में दिखाया गया है। AP, BP, AC और BC खींचिए। $\angle APB$ तथा $\angle ACB$ को मापिए तथा जाँच कीजिए कि $\angle ACB = 2\angle APB$।

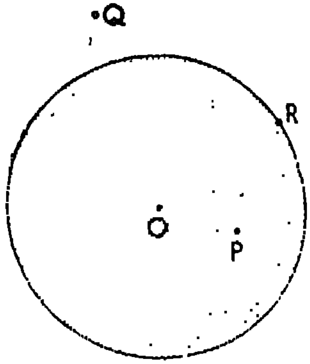


आकृति 15.8

8. वृत्त का एक चाप केन्द्र पर $100°$ का कोण बनाता है। तदनुरूपी दीर्घ चाप द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण ज्ञात कीजिए।

15.3 वृत्त का अभ्यंतर और बहिर्भाग

माना तल में कोई बिंदु O है। आइए O को केन्द्र मानकर और कोई त्रिज्या r लेकर एक वृत्त खींचें। तब, वृत्त तल के (सभी) बिंदुओं को तीन भागों में विभाजित करता है। **पहला** ऐसे बिंदु P, जो वृत्त के अन्दर स्थित हैं। **दूसरा** ऐसे बिंदु Q, जो वृत्त के बाहर स्थित हैं तथा **तीसरा** ऐसे बिंदु R, जो कि वृत्त पर स्थित हैं। (देखिए आकृति 15.9) तल का वह भाग जिसमें ऐसे सभी बिंदु P स्थित हैं वृत्त का **अभ्यंतर** कहलाता है। R जैसे सभी बिंदुओं से **अभ्यंतर की सीमा** बनती है। वृत्त के अभ्यंतर और उसकी सीमा को मिलाकर **वृत्तीय क्षेत्र** (*circular region*) कहते हैं।



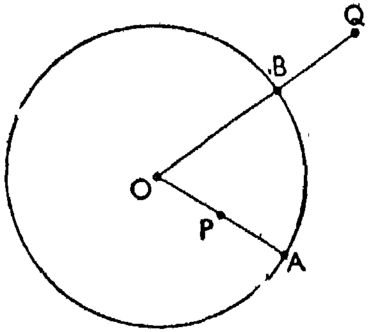
आकृति 15.9

तल का वह भाग जिसमें ऐसे सभी बिंदु Q स्थित हों **वृत्त का बहिर्भाग** कहलाता है।

माना O केन्द्र और त्रिज्या r वाले वृत्त के अभ्यंतर में P कोई बिंदु है। आइए O और P को जोड़ें और OP को बढ़ाएँ ताकि वह वृत्त को A पर काटे। (देखिए आकृति 15.10) स्पष्ट है कि OP वृत्त की त्रिज्या OA से छोटा है। दूसरे शब्दों में, वृत्त के अभ्यंतर के किसी भी बिंदु P के लिए $OP<r$ होता है।

पुनः माना Q वृत्त के बहिर्भाग में कोई बिंदु है। अब O और Q को जोड़ें। रेखाखंड OQ वृत्त को माना बिंदु B पर काटता है। (देखिए आकृति 15.10) स्पष्ट है $OQ>OB$। परन्तु OB वृत्त की एक त्रिज्या है। इस प्रकार, वृत्त के बहिर्भाग के किसी भी बिंदु Q के लिए $OQ>r$ होता है।

क्या अब हम यह निर्धारित करने का कोई नियम बता सकते हैं कि एक बिंदु वृत्त के अभ्यंतर में है या बहिर्भाग में है या कि वृत्त पर है? नियम है कि :



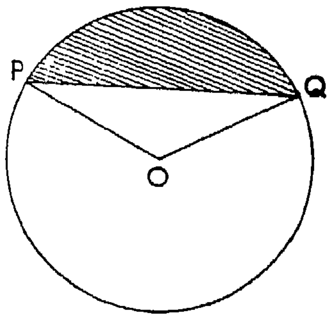
आकृति 15.10

बिंदु P केन्द्र O और त्रिज्या r वाले वृत्त के अभ्यंतर में, वृत्त पर या वृत्त के बहिर्भाग में स्थित होगा जबकि क्रमशः : $OP<r$, $OP=r$ या $OP>r$ हो।

हम यह भी देखते हैं कि यदि हमें अभ्यंतर के किसी बिंदु से बहिर्भाग के किसी बिंदु तक या विलोमतः बहिर्भाग के किसी बिंदु से अभ्यंतर के किसी बिंदु तक जाना हो तो हमें वृत्त को अवश्य ही पार करना (काटना) पड़ेगा।

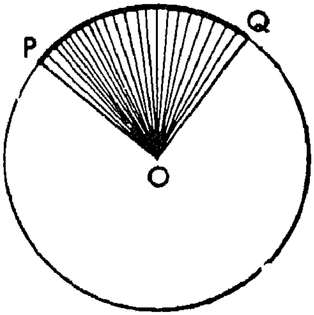
15.4 वृत्त-खंड और त्रिज्यखंड

माना O केन्द्र वाले वृत्त पर P और Q कोई दो बिंदु हैं। आइए P और Q को जोड़ें। **जीवा** PQ वृत्तीय क्षेत्र को दो भागों में विभाजित करता है। इनमें से प्रत्येक एक **वृत्त-खंड** (*segment of a circle*) कहलाता है। हम इनमें से प्रत्येक को **वृत्त-खंड** PQ कहते हैं। स्पष्ट है जिस वृत्त-खंड PQ में केन्द्र स्थित है वह बड़ा वृत्त-खंड है। परन्तु **यहाँ हम यह मान लेते हैं कि जब तक कि अन्यथा कहा न जाए वृत्त-खंड PQ से हमारा तात्पर्य दोनों वृत्त-खंडों में से छोटे वाले वृत्त-खंड से होगा। आकृति 15.11 में वृत्त-खंड PQ को छायामय** (*shaded*) **दिखाया गया है।**



आकृति 15.11

पुनः माना O केन्द्र वाले वृत्त पर P और Q कोई दो बिंदु हैं। आइए O और P तथा O और Q को जोड़ें। दोनों त्रिज्याएँ OP और OQ वृत्तीय क्षेत्र को दो भागों में विभाजित करती हैं। इनमें से प्रत्येक वृत्त का **त्रिज्यखंड** (*sector*) कहलाता है। हम इनमें से प्रत्येक को त्रिज्यखंड OPQ कहते हैं। स्पष्ट है जिस त्रिज्यखंड OPQ में दीर्घ चाप सम्मिलित है वही दोनों त्रिज्यखंडों में बड़ा है। परन्तु **हम यह मान लेते हैं कि जब तक कि अन्यथा कहा न जाए त्रिज्यखंड OPQ से हमारा तात्पर्य छोटे वाले त्रिज्यखंड से होगा अर्थात् उस त्रिज्यखंड से होगा जिसमें लघुचाप सम्मिलित है।**



आकृति 15.12

आकृति 15.12 में त्रिज्यखंड OPQ को छायामय दिखाया गया है। $\angle POQ$ **त्रिज्यखंड का कोण** (*angle of the sector*) कहलाता है।

प्रश्नावली 15.2

1. दो बिंदु O और P दिए हैं। O को केन्द्र मानकर एक वृत्त खींचिए जो कि बिंदु P से होकर जाए।

2. दो बिंदु C और Q दिए हैं। C को केन्द्र मानकर एक ऐसा वृत्त खींचिए कि Q उसके अभ्यंतर में रहे।

3. दो बिंदु C और R दिए हैं। C को केन्द्र मानकर एक ऐसा वृत्त खींचिए कि R उसके बहिर्भाग में रहे।

4. एक वृत्त और उसके बहिर्भाग में एक रेखा खींचिए। क्या आप एक ऐसी रेखा खींच सकते हैं जो कि पूर्णतया वृत्त के अभ्यंतर में हो?

5. 3 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए और इसका एक वृत्त-खंड PQ ऐसा बनाइए कि जीवा PQ की लम्बाई (i) 3 सेमी, (ii) 4 सेमी, (iii) 5 सेमी हो।

6. 3.5 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए तथा इसमें वृत्त-खंड PQ इस प्रकार छायांकित (*shade*) कीजिए कि जीवा PQ द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण

(i) $30°$, (ii) $45°$, (iii) $60°$ हो।

[इन कोणों को बनाने के लिए चाँदे का प्रयोग कीजिए।]

7. 4 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए और उसमें निम्न कोणों के त्रिज्यखंड खींचिए:

(i) $35°$ (ii) $75°$ (iii) $120°$ (iv) $240°$

प्रत्येक के लिए अलग अलग चित्र बनाइए।

एकक XVI

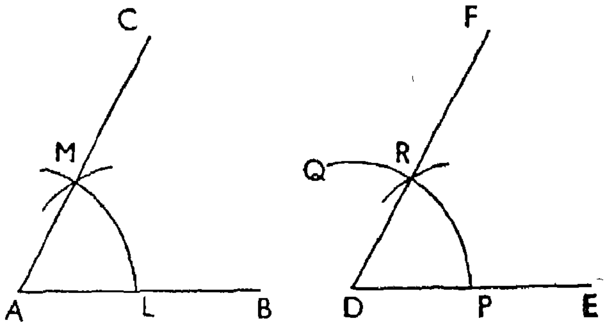
परकार से कुछ रचनाएँ

16.1 एक दिए हुए कोण के बराबर कोण बनाना

माना BAC दिया हुआ कोण है। इस कोण के बराबर कोण हम निम्न चरणों में बनाते हैं:

चरण 1: हम एक किरण DE खींचते हैं।

चरण 2: हम परकार (*compasses*) को थोड़ा खोलकर और उसके नुकीले सिरे को A पर रखकर एक चाप LM खींचते हैं जो कि AB को L पर तथा AC को M पर काटता है।



आकृति 16.1

चरण 3: परकार के फैलाव में बिना कोई परिवर्तन किए अब हम उसके नुकीले सिरे को D पर रखकर DE को P पर काटता हुआ एक चाप PQ खींचते हैं।

चरण 4: इसके बाद हम परकार को उठाकर उसके नुकीले सिरे को L पर रखते हैं तथा उसके फैलाव को इस प्रकार व्यवस्थित करते हैं कि पेंसिल वाला सिरा M पर रहे।

चरण 5: पुन: परकार के फैलाव में बिना कोई परिवर्तन किए अब हम नुकीले सिरे को P पर रखकर चाप PQ को R पर काटता हुआ एक चाप खींचते हैं।

चरण 6: अंत में हम D और R को जोड़कर किरण DF खींचते हैं।

तब, $\angle EDF$ वांछित कोण है। (देखिए आकृति 16.1)

प्रश्नावली 16.1

1. अपने चाँदे की सहायता से जाँच कीजिए कि आकृति 16.1 में दिए कोण BAC और EDF बराबर हैं।

2. पुन: आकृति 16.1 लीजिए। एक अक्स करने वाले कागज़ पर $\angle BAC$ का अक्स खींचिए। क्या आप इस अक्स को $\angle EDF$ पर इस प्रकार रख सकते हैं कि यह ठीक $\angle EDF$ पर पड़े?

[क्या इससे एक अक्स करने के कागज़ और नुकीली पिन की सहायता से दिए हुए कोण के बराबर कोण बनाने की एक अन्य विधि का संकेत मिलता है?]

3. एक न्यून कोण BAC दिया हुआ है। परकार का प्रयोग करते हुए निम्न कोणों के बराबर कोण बनाइए:

(क) $2\angle BAC$ (ख) $3\angle BAC$

4. चाँदे की सहायता से 50° का एक कोण बनाइए तथा परकार की सहायता से इस कोण के बराबर कोण बनाइए।

5. कोई दो न्यून कोण BAC और EDF खींचिए। परकार की सहायता से इन कोणों के योग के बराबर एक कोण बनाइए।

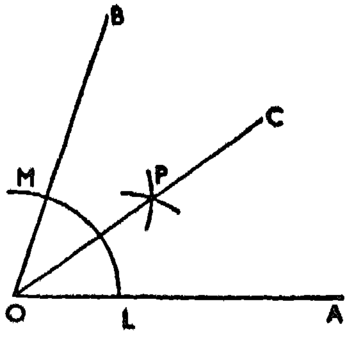
6. कोई दो कोण POQ और BAC खींचिए। परकार की सहायता से इन कोणों के अंतर के बराबर कोण बनाइए।

16.2 दिए हुए कोण को समद्विभाजित करना

आपको याद होगा कि किसी **कोण को समद्विभाजित करने का अर्थ होता है उसको दो बराबर कोणों में विभाजित करना।**

माना AOB दिया हुआ कोण है। हम इसे निम्न चरणों में समद्विभाजित करते हैं:

चरण 1: O को केन्द्र मानकर तथा एक उपयुक्त त्रिज्या लेकर आइए OA को L तथा OB को M पर काटता हुआ एक चाप खींचें।



आकृति 16.2

चरण 2 : फिर हम L को केन्द्र मानकर तथा $\frac{1}{2}$ LM से अधिक (क्यों?) त्रिज्या लेकर एक चाप खींचते हैं।

चरण 3 : अब हम M को केन्द्र मानकर तथा चरण 2 वाली त्रिज्या लेकर एक चाप खींचते हैं जो कि माना चरण 2 में खींचे गए चाप को P पर काटता है।

चरण 4 : अब हम किरण OC खींचने के लिए O और P को जोड़ते हैं।
तब OC वांछित किरण है जो कि $\angle AOB$ को समद्विभाजित करती है। (देखिए आकृति 16.2)
क्या आप कागज़ को OC पर मोड़कर यह जाँच कर सकते हैं कि $\angle AOC = \angle COB$?

प्रश्नावली 16.2

1. चाँदे की सहायता से आकृति 16.2 में दिए कोणों AOB, AOC तथा COB को मापिए। निम्न की जाँच कीजिए :

(क) $\angle AOC = \angle COB$
(ख) $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$
(ग) $2\angle AOC = 2\angle COB = \angle AOB$

2. आकृति 16.2 लीजिए। $\angle AOC$ का एक अक्स करने वाले कागज़ पर अक्स खींचिए और इस अक्स को $\angle COB$ पर रखिए। क्या $\angle AOC$ और $\angle COB$ बराबर हैं?

3. चाँदे की सहायता से एक $70°$ का कोण बनाइए तथा परकार की सहायता से इसे समद्विभाजित कीजिए। प्रत्येक आधे को मापिए।

4. चाँदे की सहायता से एक $132°$ का कोण बनाइए तथा परकार से इसे समद्विभाजित कीजिए। चाँदे से प्रत्येक आधे को मापिए।

*5. $120°$ का एक कोण बनाइए तथा परकार से इसे चार बराबर भागों में विभाजित कीजिए। चाँदे की सहायता से जाँच कीजिए कि प्रत्येक भाग $30°$ के बराबर है।

*6. कोई त्रिभुज ABC खींचिए। परकार की सहायता से कोणों A, B और C के समद्विभाजक खींचिए। आप क्या देखते हैं?

उपर्युक्त रचना को कोई और त्रिभुज लेकर दोहराइए। पुनः आप क्या देखते हैं? हम देखेंगे कि **त्रिभुज के तीनों कोणों के समद्विभाजक एक ही बिंदु पर मिलते हैं।**

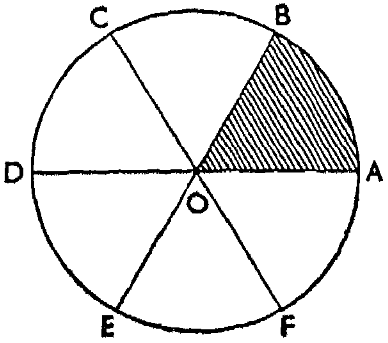
16.3 एक वृत्तीय क्षेत्र को छः बराबर त्रिज्यखंडों में विभाजित करना

माना दिए हुए वृत्त का केन्द्र O है तथा त्रिज्या r है। हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : आइए केन्द्र O को वृत्त पर स्थित किसी बिंदु A से जोड़ें।

चरण 2 : अब हम A को केन्द्र मानकर तथा दी हुई त्रिज्या r लेकर वृत्त को B पर काटता हुआ एक चाप खींचते हैं।

चरण 3 : फिर B को केन्द्र मानकर तथा वही त्रिज्या r लेकर हम वृत्त को C पर काटता हुआ एक अन्य चाप खींचते हैं। इसी प्रक्रिया को जारी रखते हुए हम बिंदु D, E और F प्राप्त करते हैं।



आकृति 16.3

चरण 4 : OB, OC, OD, OE और OF खींचिए।

त्रिज्यखंड AOB, BOC, COD, DOE, EOF और FOA ही वृत्त के छः बराबर वांछित त्रिज्यखंड हैं। (देखिए आकृति 16.3)

कोणों AOB, BOC, COD, DOE, EOF तथा FOA को मापिए। क्या ये बराबर हैं? हम देखेंगे कि प्रत्येक कोण 60° का है।

16.4 60° का कोण बनाना

अनुच्छेद 16.3 में प्रत्येक त्रिज्यखंड का कोण 60° है। अतः इस रचना से हमें 60° का कोण बनाने के लिए निम्न चरणों का संकेत मिलता है :

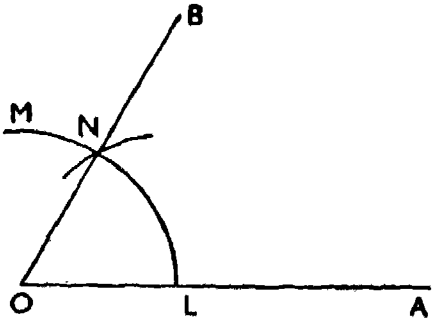
चरण 1 : हम एक किरण OA खींचते हैं।

चरण 2 : O को केन्द्र मानकर और एक उपयुक्त त्रिज्या लेकर आइए OA को L पर काटता हुआ एक चाप LM खींचें।

चरण 3 : अब L को केन्द्र मानकर तथा वही त्रिज्या (OL के बराबर) लेकर, जो कि चरण 2 में ली थी, हम चाप LM को N पर काटता हुआ एक अन्य चाप खींचते हैं।

चरण 4 : अब हम किरण OB खींचने के लिए O और N को जोड़ते हैं।

तब $\angle AOB$, 60° का वांछित कोण है। (देखिए आकृति 16.4)



आकृति 16.4

प्रश्नावली 16.3

1 30° का एक कोण बनाइए।
[संकेत : $30^\circ=\frac{1}{2}(60^\circ)$]

2. 120° का एक कोण बनाइए।
[संकेत : $120^\circ=2(60^\circ)$]

3. 15°, 75° और 240° के कोण बनाइए।

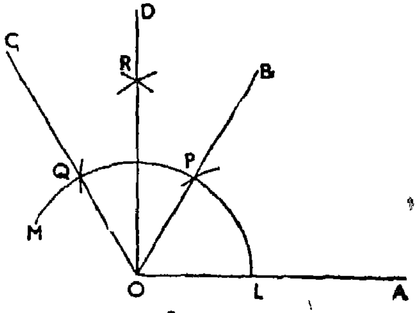
*4. 90° का एक कोण बनाइए।
[संकेत : 60° का एक कोण बनाइए और उसे समद्विभाजित कीजिए। अब 30° में 60° या 60° में 30° जोड़िए।]

16.5 90° का कोण बनाना

प्रश्नावली 16.3 के प्रश्न 4 में हम 90° के कोण बनाने की एक विधि का संकेत दे चुके हैं। अब हम नीचे एक दूसरी विधि दे रहे हैं। निम्न चरण आवश्यक हैं:

चरण 1 : हम एक किरण OA खींचते हैं।

चरण 2 : O को केन्द्र मानकर और एक उपयुक्त त्रिज्या लेकर हम OA को L पर काटता एक चाप LM खींचते हैं।



आकृति 16.5

चरण 3 : फिर L को केन्द्र मानकर तथा वही त्रिज्या लेकर (OL के बराबर) जो कि चरण 2 में थी हम LM को P पर काटता हुआ एक चाप खींचते हैं।

चरण 4 : तब P को केन्द्र मानकर तथा वही त्रिज्या लेकर (OL के बराबर) चाप LM को एक अन्य बिंदु Q पर काटता हुआ एक चाप खींचते हैं।

चरण 5 : आइए अब किरण OB खींचने के लिए O और P को तथा किरण OC खींचने के लिए O और Q को जोड़ें।

तब, AOB और BOC में से प्रत्येक कोण 60° का है।

चरण 6 : अब हम $\angle BOC$ को किरण OD से समद्विभाजित करते हैं।
तब, $\angle AOD$, 90° का वांछित कोण है। (देखिए आकृति 16.5) हम यह भी कहते हैं कि OD, **बिंदु O पर OA पर लम्ब है** या यह कि DO, **D से OA पर लम्ब है।** संकेतन में हम इसे $OD \perp OA$ या $DO \perp OA$ लिखते हैं।

यह देखा जा सकता है कि 90° **के कोण की रचना एक ऋजु कोण को समद्विभाजित करके भी की जा सकती है।** (देखिए प्रश्नावली 16.4 का प्रश्न 3)

प्रश्नावली 16.4

1. 45° का एक कोण बनाइए।
[**संकेत :** $45^\circ = \frac{1}{2}(90^\circ)$]
2. 135° का एक कोण बनाइए।
[**संकेत :** $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$]
3. एक ऋजु कोण को समद्विभाजित करके 90° का एक कोण बनाइए।
4. निम्न कोणों की रचना कीजिए :
$22\frac{1}{2}^\circ$, 150°

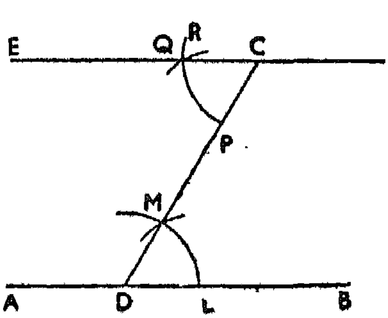
16.6 एक दी हुई रेखा के बाहर एक दिए हुए बिंदु से होकर उस रेखा के समांतर एक रेखा खींचना

माना दी हुई रेखा AB है और C उसके बाहर कोई बिंदु है। हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : आइए AB पर कोई बिंदु D लें और उसे C से मिला दें।

चरण 2 : फिर हम D को केन्द्र मानकर तथा एक उपयुक्त त्रिज्या लेकर AB को L तथा DC को M पर काटता हुआ एक चाप खींचते हैं।

चरण 3 : अब C को केन्द्र मानकर और वही त्रिज्या (DL के बराबर) लेकर जो कि चरण 2 में ली थी हम CD को P पर काटता हुआ एक चाप PR खींचते हैं।



आकृति 16.6

चरण 4 : अब हम परकार के नुकीले सिरे को L पर रखकर उसके फैलाव को इस प्रकार व्यवस्थित करते हैं कि पेंसिल वाला सिरा M पर रहे। तब हम उसके फैलाव में बिना कोई परिवर्तन किए तथा P को केन्द्र मानकर चाप PR को Q पर काटता हुआ एक चाप खींचते हैं।

चरण 5 : अब हम रेखा CE खींचने के लिए C और Q को जोड़ते हैं।
तब CE ही दिए हुए बिंदु C से होकर जाने वाली तथा AB के समांतर वांछित रेखा है। (देखिए आकृति 16.6)

यह देखा जा सकता है कि हमने समांतर रेखाएँ खींचने के लिए बराबर एकांतर कोणों के एक युग्म की रचना की है।

प्रश्नावली 16.5

1. कोई त्रिभुज ABC खींचिए और AB का मध्य-बिंदु D मान लीजिए। D से होकर BC के समांतर एक रेखा खींचिए जो कि AC को, मान लीजिए, E पर काटती है। AE और EC मापिए। क्या E, AC का मध्य-बिंदु है ?

2. 8 सेमी लम्बाई का एक रेखाखंड AB खींचिए। इसके बाहर कोई बिंदु C लीजिए। C से होकर AB के समांतर एक रेखा खींचिए।

16.7 त्रिभुज की रचना करना जब कि उसकी तीनों भुजाएँ दी हुई हैं

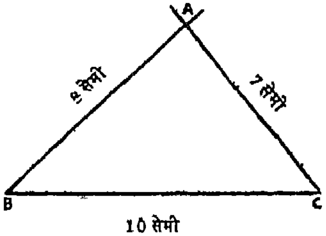
मान लीजिए हमें उस त्रिभुज की रचना करनी है जिसकी भुजाएँ क्रमश: 10 सेमी, 8 सेमी तथा 7 सेमी हैं। हम यह निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : हम 10 सेमी लम्बाई का एक रेखाखंड BC खींचते हैं।

चरण 2 : फिर B को केन्द्र मानकर और 8 सेमी त्रिज्या लेकर हम एक चाप खींचते हैं।

चरण 3 : तब, C को केन्द्र मानकर और 7 सेमी त्रिज्या लेकर हम एक दूसरा चाप खींचते हैं जो कि पहले चाप को माना A पर काटता है।

चरण 4 : अब हम A और B तथा A और C को जोड़ते हैं। ABC वांछित त्रिभुज है। (देखिए आकृति 16.7)



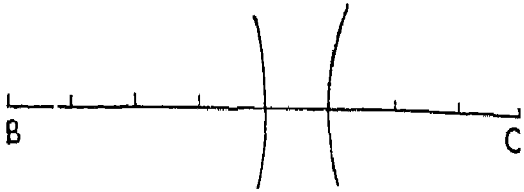
आकृति 16.7

प्रश्नावली 16.6

1. निम्न भुजाओं के त्रिभुज की रचना कीजिए :
   - (i) 4 सेमी, 4.5 सेमी, 2.9 सेमी
   - (ii) 6.2 सेमी, 6 सेमी, 9 सेमी
   - (iii) 4 सेमी, 4.3 सेमी, 5 सेमी
   - (iv) 5 सेमी, 4 सेमी, 3 सेमी
   - (v) 13 सेमी, 12 सेमी, 5 सेमी

2. क्या आप ऐसा त्रिभुज खींच सकते हैं जिसकी भुजाएं 8 सेमी, 4 सेमी और 3 सेमी हों?

[पहले 8 सेमी लम्बाई का एक रेखाखंड, मान लीजिए, BC खींचिए। तब B को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए। पुन: C को केन्द्र मानकर और 3 सेमी त्रिज्या लेकर एक दूसरा चाप खींचिए। (देखिए आकृति 16.8) क्या दोनों चाप परस्पर काटते हैं? हम देखते हैं कि यदि हम चापों की जगह पूरे वृत्त भी खींच लें तो भी दोनों चाप परस्पर नहीं काटते। अत: हमारी **रचना असफल रहती है**। हम 8 सेमी, 4 सेमी और 3 सेमी भुजाओं का त्रिभुज नहीं खींच सकते। क्या आप इसका कारण बता सकते हैं? क्या आपको याद है कि **त्रिभुज में किन्हीं भी दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अवश्य ही बड़ा होना चाहिए।**



आकृति 16.8

3. एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा 6 सेमी हो। इसके कोण मापिए। आप क्या देखते हैं?

प्रत्येक भुजा 5 सेमी लेकर इस रचना को दोहराइए। पुन: आप क्या देखते हैं?
हम देखेंगे कि **समबाहु त्रिभुज के सभी कोण बराबर होते हैं। साथ ही प्रत्येक कोण 60° का है।**

4. एक त्रिभुज ABC खींचिए जिसमें $BC = 6$ सेमी तथा $AB = AC = 5$ सेमी हो। यह त्रिभुज किस प्रकार का है? कोणों B और C को मापिए। आप क्या देखते हैं?

5. एक त्रिभुज ABC खींचिए जिसमें $BC = 7$ सेमी, $AB = 6$ सेमी तथा $CA = 7$ सेमी हो। यह त्रिभुज किस प्रकार का है? कोणों A और B को मापिए। क्या ये बराबर हैं?

प्रश्न 4 और 5 से हम देखेंगे कि **समद्विबाहु त्रिभुज में बराबर (समान) भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।**

6. 5 सेमी, 6 सेमी तथा 7 सेमी भुजाओं वाला एक त्रिभुज खींचिए और उसके कोण मापिए।

7. 4.5 सेमी, 5.6 सेमी तथा 7 सेमी भुजाओं वाला एक त्रिभुज खींचिए और उसके कोण मापिए।

प्रश्न 6 और 7 से हम देखेंगे कि **विषमबाहु त्रिभुज में सभी कोण असमान** (*unequal*) **होते हैं।**

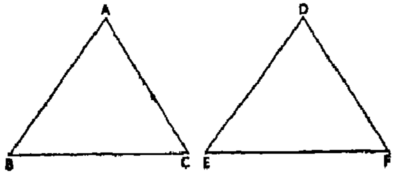
एकक XVII

बहुफलकों की पहिचान

17.1 इस एकक में हम कुछ सरल ठोसों के आकारों का अध्ययन करेंगे। परन्तु पहले हम कुछ ऐसी आधारभूत संकल्पनाओं की व्याख्या करेंगे जो कि हमारे लिए बाद में उपयोगी होंगी।

17.2 समतल आकृतियों की सर्वांगसमता

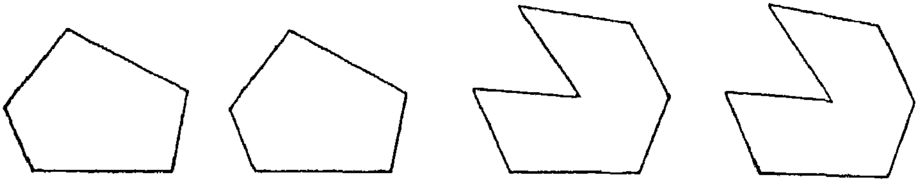
आइए एक गत्ते का त्रिभुजाकार टुकड़ा लें। हम इसे एक कागज़ के पन्ने पर रखते हैं और इसकी रूप रेखा (*outline*) खींचते हैं। हमें एक त्रिभुज, मान लीजिए, ABC प्राप्त होता है। अब हम गत्ते को दूसरे स्थान पर रखते हैं और पुनः उसकी रूप रेखा खींचते हैं। हमें फिर एक त्रिभुज, मान लीजिए, DEF प्राप्त हो जाता है। हम इन दोनों त्रिभुजों की भुजाओं के बारे में क्या कह सकते हैं? आइए कल्पना करें कि दोनों त्रिभुज स्वयं गत्ते के बने हुए हैं। क्या हम एक त्रिभुज को उठाकर दूसरे पर इस प्रकार रख सकते हैं कि वह दूसरे को पूर्णतया ढक ले या दूसरे शब्दों में दूसरे के साथ **संपाती** हो जाए? स्पष्ट है, हाँ! ऐसे दो त्रिभुज **सर्वांगसम** (*congruent*) कहलाते हैं। दूसरे शब्दों में, **दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी तदनुरूपी भुजाएँ बराबर हों।**



आकृति 17.1

सर्वांगसमता की संकल्पना किन्हीं भी दो समतल आकृतियों के लिए लागू की जा सकती है। इस प्रकार, **दो समतल आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं यदि, यह कल्पना करते हुए कि वे गत्ते के टुकड़े हैं, एक को उठाकर दूसरे पर इस प्रकार रखा जा सके कि वह दूसरी को पूर्णतया ढक ले अर्थात् दूसरे के साथ संपाती हो जाए। ये सर्वांगसम आकृतियाँ सभी प्रकार से बराबर होती हैं।**

क्या अब आप कह सकते हैं कि दो आयत सर्वांगसम होंगे यदि उनकी लम्बाइयाँ बराबर हों तथा उनकी चौड़ाइयाँ बराबर हों? दो वर्ग कब सर्वांगसम होंगे?



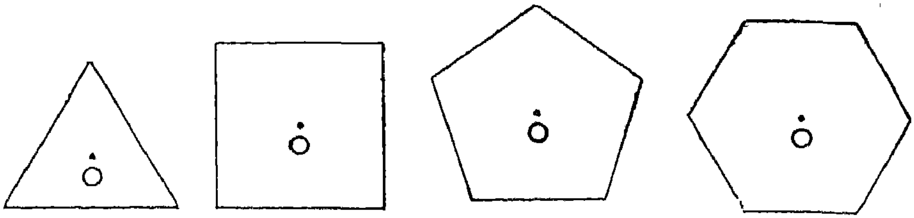
(i) (ii)

आकृति 17.2

आकृतियों 17.2 (i) और (ii) में सर्वांगसम बहुभुजों (*polygons*) के दो युग्म दिखाए गए हैं।

17.3 सम बहुभुज

यदि किसी बहुभुज की सभी भुजाएँ बराबर हों तथा सभी कोण बराबर हों तो वह सम बहुभुज (*regular polygon*) **कहलाता है।** आकृति 17.3 में क्रमशः 3, 4, 5 और 6 भुजाओं के सम बहुभुज दिखाए गए हैं।



(i) समबाहु त्रिभुज (ii) वर्ग (iii) सम पंचभुज (iv) सम षड्भुज

आकृति 17.3

प्रत्येक सम बहुभुज के अंदर एक ऐसा बिंदु, मान लीजिए, *O* है जोकि प्रत्येक शीर्ष से बराबर दूरी पर है। यह बिंदु सम बहुभुज का **केन्द्र** (*centre*) कहलाता है।

17.4 ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दिशाएँ

आइए एक डोरी का एक सिरा पकड़ें और उसके दूसरे सिरे पर एक पत्थर बाँध कर लटकाएँ। डोरी तनी हुई लटकी रहती है और एक रेखा निरूपित करती है। (देखिए आकृति 17.4) इस रेखा की दिशा एक **ऊर्ध्वाधर दिशा** (*vertical direction*) तथा यह रेखा एक **ऊर्ध्वाधर रेखा** (*vertical line*) कहलाती है। यदि हम एक दूसरी डोरी इसी प्रकार लटकाएँ तो वह भी ऊर्ध्वाधर दिशा में लटकेगी। दोनों डोरियों की दिशाएँ एक ही हैं तथा इन दिशाओं के अनुदिश रेखाएँ समांतर हैं। वास्तव में, **सभी ऊर्ध्वाधर रेखाएँ समांतर होती हैं।** इस प्रकार, हम केवल **एक ऊर्ध्वाधर दिशा** की बात कर सकते हैं।



आकृति 17.4: डोरी से लटका हुआ पत्थर

ऊर्ध्वाधर रेखा का एक अन्य उदाहरण साहुल (plumb-line) है। राज (mason) इसका प्रयोग यह जाँच करने के लिए करता है कि वह जो दीवार बना रहा है वह सीधी है या नहीं। **आइए एक आयताकार कमरे के फर्श, छत और**

दीवारों को देखें। फर्श चौरस है। हम कहते हैं कि यह एक **क्षैतिज तल** (*horizontal plane*) में है। छत का तल भी एक क्षैतिज तल है। दीवारें फर्श पर सीधी खड़ी हैं और प्रत्येक जगह साहुल के समांतर हैं। दीवारों के फलक (faces) **ऊर्ध्वाधर तलों** (*vertical planes*) के उदाहरण हैं।

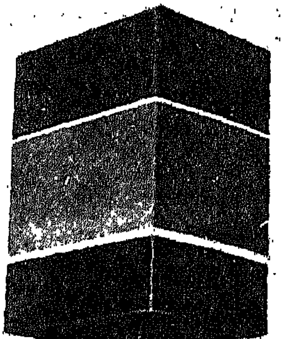
क्षैतिज तल में स्थित प्रत्येक रेखा एक **क्षैतिज रेखा** (*horizontal line*) कहलाती है। आप फर्श या छत के किनारों के बारे में क्या कह सकते हैं? उन किनारों के बारे में क्या कह सकते हैं जिनमें दिवारों के युग्म परस्पर मिलते हैं?



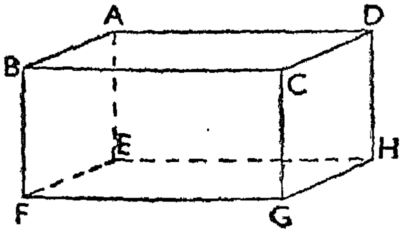
आकृति 17.5 : साहुल

17.5 घनाभ

आइए आकृति 17.6 (i) में दिए एक बक्स के चित्र को देखें। हम इसे **आयताकार समांतर षड्फलक** (*rectangular parallelopiped*) या केवल **घनाभ** (*cuboid*) कहते हैं। घनाभ के अन्य उदाहरण हैं: ईंट, आयताकार कमरा या अलमारी।



(i) बक्स का चित्र



(ii) घनाभ

आकृति 17.6

हम देखते हैं कि घनाभ के आठ **कोने** अर्थात् **शीर्ष** होते हैं। मान लीजिए ये *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* और *H* हैं। [देखिए आकृति 17.6 (ii)]

इसके बारह (सीधे) **किनारे** होते हैं। ये हैं: *AB*, *EF*, *DC*, *HG*; *AD*, *BC*, *EH*, *FG*; *AE*, *BF*, *DH*, *CG*। साथ ही, इसके छः **समतल फलक** होते हैं। ये हैं:

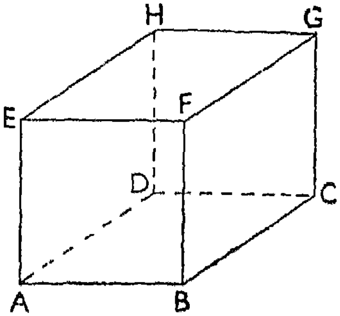
ABCD, *EFGH*; *ABFE*, *DCGH*; *ADHE*, *BCGF*

आइए फलक $ABCD$ का आकार देखें। हम देखेंगे कि भुजाएँ AB और CD बराबर हैं। साथ ही भुजाएँ AD और BC बराबर हैं। इसके साथ ही, सभी कोण A, B, C और D समकोण हैं। इस प्रकार $ABCD$ एक आयत है। इसी प्रकार, शेष पाँचों फलक भी आयत हैं।

घनाभ के बारह किनारों को ऊपर चार चार के तीन समूहों में लिखा गया है। हम देखते हैं कि पहले समूह के चारों किनारे AB, EF, DC और HG बराबर हैं और समांतर हैं। यही अन्य समूहों के किनारों के लिए सत्य है। इस प्रकार हम देखते हैं कि बारह किनारों की केवल तीन विभिन्न लम्बाइयाँ हैं। प्राय: इनमें सबसे बड़ी को घनाभ की **लम्बाई** (*length*) कहते हैं। शेष दो में से एक, **चौड़ाई** (*breadth* या *width*) तथा दूसरी **मोटाई** (*thickness*) या **गहराई** (*depth*) या **ऊँचाई** (*height*) कहलाती हैं। ये तीनों लम्बाइयाँ घनाभ की तीन **विमाएँ** (*dimensions*) कहलाती हैं।

17.6 घन

एक घनाभ जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई बराबर हों, **घन** (*cube*) कहलाता है। घन में सभी छ: फलक सर्वांगसम वर्ग होते हैं तथा सभी बारह किनारे बराबर होते हैं। [देखिए आकृति 17.7]



आकृति 17.7 : घन

प्रश्नावली 17.1

1. आकृति 17.6 (ii) में फलक $ABCD$ और $EFGH$ देखिए। हम देखते हैं कि ये सर्वांगसम आयत हैं और समांतर हैं। फलकों के अन्य दो युग्मों के नाम बताइए जो कि सर्वांगसम और समांतर हैं।

2. यदि आकृति 17.6 (ii) में $AB = AD$ हो तो उसके फलकों $ABCD$ और $EFGH$ के क्या आकार होंगे ?

3. यदि आकृति 17.6 (ii) में $AD = AE$ हो तो उसके फलकों $ADHE$ और $BCGF$ के क्या आकार होंगे ?

4. आकृति 17.6 (ii) में यदि तीन किनारे AB, AD और AE बराबर हों तो घनाभ के फलकों का क्या आकार होगा ?

5. आकृति 17.6 (ii) में देखिए कि फलक $ABCD$ तथा $ABFE$ में एक उभयनिष्ठ किनारा

(common edge) AB है। हम यह भी कहते हैं कि फलक $ABCD$ और $ABFE$ किनारे AB में **प्रतिच्छेद करते** या **मिलते** हैं। इसी प्रकार प्रत्येक किनारा दो फलकों में उभयनिष्ठ है। उन फलकों के युग्मों के नाम बताइए जिनके उभयनिष्ठ किनारे निम्न हैं :

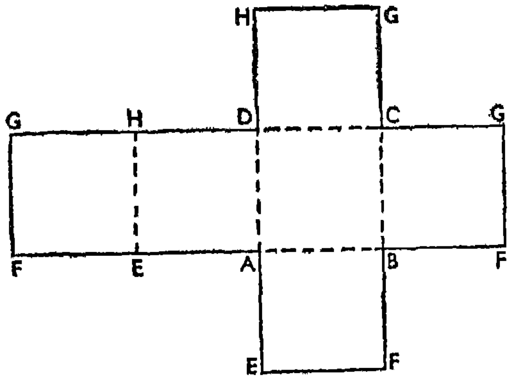
(i) BF (ii) CD (iii) HE

6. किनारों AB, AD और AE में शीर्ष A सर्वनिष्ठ (common) है। [देखिए आकृति 17.6 (ii)] हम यह भी कहते हैं कि ये किनारे A पर **मिलते** या **प्रतिच्छेद** करते हैं। इसी प्रकार प्रत्येक शीर्ष पर तीन किनारे मिलते हैं। उन तीन किनारों के नाम लिखिए जो

(i) B, (ii) D, (iii) G पर मिलते हैं।

7. घनाभ के छः फलक होते हैं। तीन फलकों $ABCD$, $ABFE$ और $ADHE$ में शीर्ष A सर्वनिष्ठ है अर्थात् ये फलक एक बिंदु A पर **मिलते** हैं। अन्य शेष तीन फलक $EFGH$, $DCGH$ और $BCGF$, G पर मिलते हैं। [देखिए आकृति 17.6 (ii)] A और G को घनाभ के शीर्षों का **सम्मुख युग्म** (*opposite pairs*) कहते हैं तथा AG घनाभ का **विकर्ण** (*diagonal*) कहलाता है। अन्य तीन सम्मुख शीर्षों तथा तदनुरूपी विकर्णों के नाम बताइए।

8. एक गत्ता लीजिए। इस पर 5 सेमी भुजा के छः सर्वांगसम वर्ग बनाइए जैसा कि आकृति 17.8 में दिखाया गया है।



आकृति 17.8 : घन का जाल

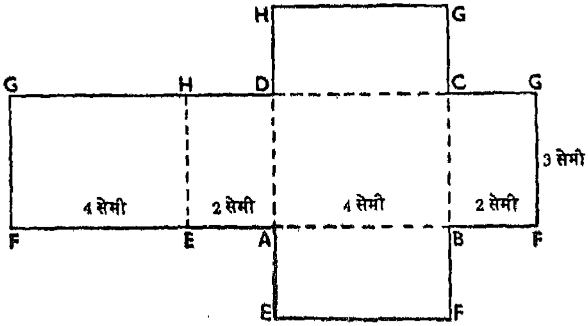
इन वर्गों में से प्रत्येक, घन का एक फलक निरूपित करता है। अब इस आकृति को गत्ते में से काट लीजिए और इसे बिंदुंकित रेखाओं (*dotted lines*) के अनुदिश इस प्रकार मोड़िए कि एक से अंकित शीर्ष पास पास आ जाएँ। हमें घन का एक प्रतिरूप (*model*) प्राप्त हो जाता है। [इस प्रतिरूप

को सेलोटेप (*cellotape*) या गोंद लगे हुए कागज़ के टेप से जोड़ा जा सकता है] क्या अब आप देख सकते हैं कि वर्गों को आकृति 17.8 में दिखाए गए एक विशेष प्रकार से ही क्यों खींचा गया था ?

इस आकृति में दिए गए आकार को घन का **जाल** (*net*) कहते हैं।

9. एक घनाभ, जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 4 सेमी, 3 सेमी और 2 सेमी है, का जाल खींचिए। इस जाल से घनाभ का प्रतिरूप बनाइए।

[**संकेत :** घनाभ का जाल आकृति 17.9 में दिखाया गया है। इसे बिंदुंकित रेखाओं के अनुदिश मोड़िए ताकि एक से अंकित बिंदु पास पास आ जाएँ। इससे हमें घनाभ का प्रतिरूप प्राप्त हो जाता है जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 4 सेमी, 3 सेमी और 2 सेमी हैं।



आकृति 17.9 : घनाभ का जाल

यदि आप इसमें से आयत $EFGH$ को छोड़ दें तो आपको एक बिना ढक्कन के बक्स का जाल प्राप्त हो जाएगा। वास्तव में गत्ते आदि के डिब्बे या बक्से ऐसे ही जालों से बनाए जाते हैं।]

10 एक घनाभ का प्रतिरूप बनाइए जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 5 सेमी, 4 सेमी और 3 सेमी हैं।

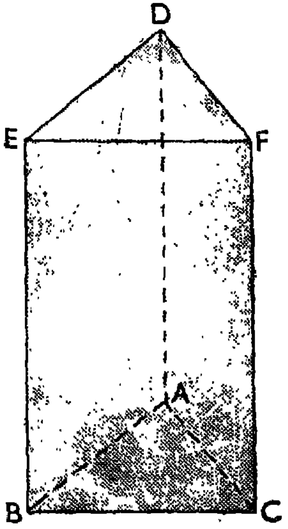
टिप्पणी जब कोई घनाभ (या घन) किसी मेज़ पर रखा जाता है तो उसके ऊपरी और निचले फलक क्षैतिज होते हैं तथा चारों पार्श्व फलक (*side faces*) ऊर्ध्वाधर होते हैं। साथ ही, ऊपरी और निचले फलक के आठों किनारे क्षैतिज होते हैं तथा शेष चार किनारे ऊर्ध्वाधर होते हैं। इस स्थिति में निचला फलक घनाभ (या घन) का **आधार** (*base*) कहलाता है तथा इसकी लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः घनाभ (या घन) की **लम्बाई** और **चौड़ाई** कहलाती हैं। ऊर्ध्वाधर किनारों की लम्बाई घनाभ (या घन) की **ऊँचाई** कहलाती है।

17.7 लम्ब प्रिज्म

आइए आकृति 17.10 मे दिए हुए ठोस को देखें। इसके पाँच फलक हैं। इनमें दो सर्वांगसम एवं समांतर त्रिभुज *ABC* और *DEF* हैं तथा तीन आयत *BCFE*, *CADF* और *ABED* हैं। इसके नौ किनारे और छः शीर्ष हैं। यदि ठोस को एक मेज पर इस प्रकार रखा जाए कि दोनों त्रिभुजाकार फलक क्षैतिज हों तो किनारे *AD*, *BE* और *CF* ऊर्ध्वाधर होंगे। हम इस ठोस को **त्रिभुजाकार आधार का लम्ब प्रिज्म** (*right prism on a triangular base*) या केवल **त्रिभुजाकार लम्ब प्रिज्म** (*triangular right prism*) कहते हैं।

चतुर्भुज, पंचभुज, इत्यादि आधार वाले प्रिज्म भी हो सकते हैं। **प्रत्येक लम्ब प्रिज्म में उसका आधार और सम्मुख फलक दो सर्वांगसम बहुभुज होते हैं जबकि शेष सभी फलक आयत होते हैं।** ऊर्ध्वाधर किनारों, जो कि सभी बराबर और समांतर हैं, में से किसी एक की लम्बाई को प्रिज्म की **ऊँचाई** (*height*) या **लम्बाई** कहा जा सकता है।

हम देखते हैं कि घनाभ एक प्रिज्म है। (क्यों?) वास्तव में, कभी कभी घनाभ को आयताकार लम्ब प्रिज्म (*rectangular right prism*) भी कहते हैं।



आकृति 17.10 : लम्ब प्रिज्म

प्रश्नावली 17.2

1. आकृति 17.10 में हम देखते हैं कि किनारा *EF*, फलकों *DEF* और *BCFE* में उभयनिष्ठ हैं। अन्य किनारों में से प्रत्येक, फलकों के एक युग्म में उभयनिष्ट है। उन फलकों के युग्मों के नाम बताइए जिनमें निम्नलिखित किनारे उभयनिष्ठ हैं:

(i) *AD* (ii) *CF* (iii) *AB*

2. आकृति 17.10 में देखिए कि प्रत्येक शीर्ष पर तीन किनारे मिलते हैं। उन तीनों किनारों के नाम बताइए जोकि निम्न शीर्षों पर मिलते हैं:

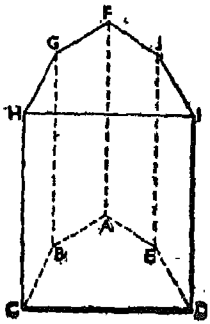
(i) *A* (ii) *E* (iii) *C*

3. पंचभुजीय आधार (*pentagonal base*) के प्रिज्म को देखिए। (आकृति 17.11) इसके सभी फलकों, किनारों और शीर्षों के नाम बताइए।

*4. बिना आकृति खींचे, निम्न आधारों के प्रिज्मों में फलकों, किनारों और शीर्षों की संख्याएँ बताइए:

(i) षड्भुज (ii) अष्ठभुज

[क्या अब आप इस नियम का अनुमान लगा सकते हैं कि 'यदि



आकृति 17.11

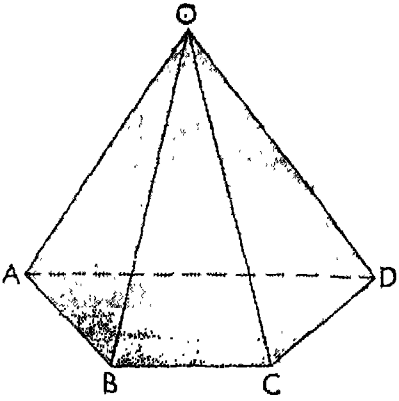
आधार के बहुभुज की भुजाओं की संख्या m हो तो प्रिज्म के फलकों की संख्या $m+2$, किनारों की संख्या $3m$ तथा शीर्षों की संख्या $2m$ होती है' ?]

17.8 पिरैमिड

आइए आकृति 17.12 में दिए हुए ठोस को देखें। इसके पाँच फलक हैं। इन फलकों में एक चतुर्भुजीय आधार $ABCD$ तथा चार त्रिभुजाकार फलक OAB, OBC, OCD और ODA हैं। त्रिभुजाकार फलक एक सर्वनिष्ठ बिंदु O पर मिलते हैं। हम इस ठोस को चतुर्भुजीय आधार का **पिरैमिड** (*pyramid*) कहते हैं।

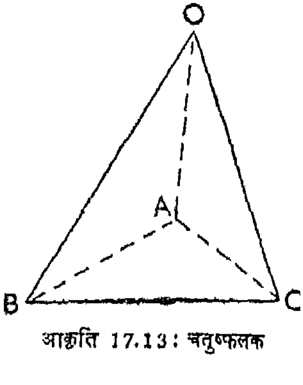
O पिरैमिड का **शीर्ष** कहलाता है। इस पिरैमिड के आठ किनारे OA, OB, OC, OD, AB, BC, CD और DA तथा पाँच शीर्ष O, A, B, C और D हैं।

अन्य आधारों जैसे कि त्रिभुज, पंचभुज, षड्भुज, इत्यादि के भी पिरैमिड हो सकते हैं।



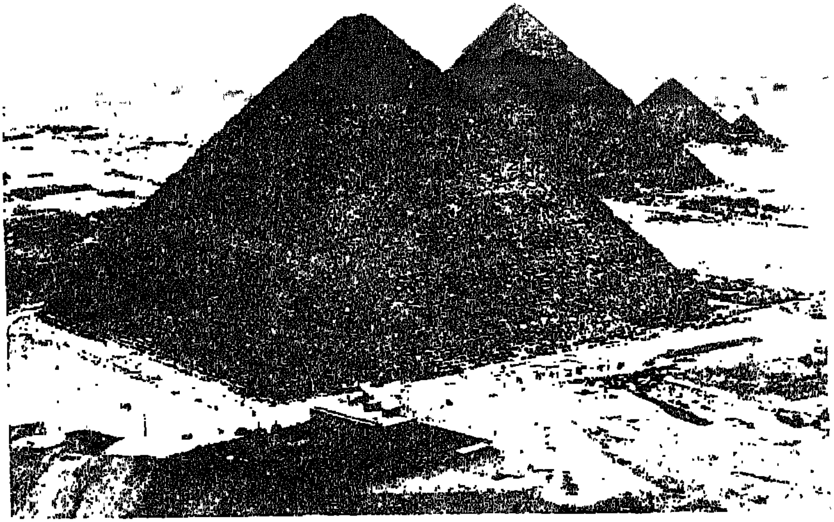
आकृति 17.12 : पिरैमिड

त्रिभुजाकार आधार का पिरैमिड **चतुष्फलक** (*tetrahedron*) कहलाता है। (देखिए आकृति 17.13) इसके चार फलक होते हैं और इनमें से प्रत्येक एक त्रिभुज होता है। चतुष्फलक के छः किनारे और चार शीर्ष होते हैं। चूँकि चतुष्फलक के सभी फलक त्रिभुज हैं इसलिए इनमें से किसी एक को उसका आधार माना जा सकता है तथा इस फलक के बाहर वाले कोने को उसका शीर्ष। यदि किसी चतुष्फलक के सभी किनारे बराबर हों तो वह एक **सम** चतुष्फलक (*regular tetrahedron*) कहलाता है।



आकृति 17.13 : चतुष्फलक

आपने मिस्र के महान पिरैमिडों के बारे में सुना होगा जो कि 3000-2000 ई० पू० काल में बनाए गए थे। ये वर्गीय आधारों (*square bases*) पर पिरैमिडों के आश्चर्यजनक और यथार्थ उदाहरण हैं। (देखिए आकृति 17.14) ये किस प्रकार बनाए गए? कोई नहीं जानता। क्या ये कब्रिस्तान थे? कोई नहीं जानता। क्या इनमें कोई गुप्त रहस्य छिपा हुआ है? कोई नहीं जानता।



आकृति 17.14 : मिस्र के पिरैमिड

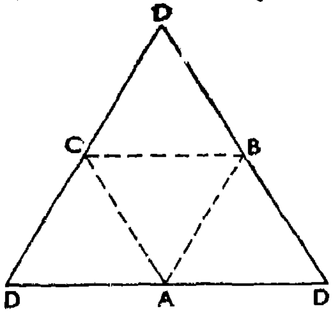
संयुक्त अरब गणराज्य के नई दिल्ली स्थित दूतावास के प्रेस ब्यूरो के सौजन्य से

प्रश्नावली 17.3

1. आकृति 17.13 में दिए चतुष्फलक के सभी फलकों, किनारों और शीर्षों के नाम बताइए।

2. चतुष्फलक के दो फलक OAB तथा OAC किनारे OA पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा शेष दो फलक OBC तथा ABC किनारे BC पर प्रतिच्छेद करते हैं। (देखिए आकृति 17.13) OA और BC **चतुष्फलक के सम्मुख किनारे (*opposite edges*) कहलाते हैं। सम्मुख किनारों के अन्य दो युग्मों के नाम बताइए।**

3. एक गत्ते के टुकड़े पर 6 सेमी की भुजा का एक समबाहु त्रिभुज खींचकर उसे काट लीजिए। इसके प्रत्येक शीर्ष को D से व्यक्त कीजिए। माना A, B और C क्रमशः इस त्रिभुज की भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं। इनको बिंदुंकित रेखाओं द्वारा जोड़िए। (देखिए आकृति 17.15) हमें एक चतुष्फलक $ABCD$ का जाल प्राप्त होता है जिसका प्रत्येक किनारा 3 सेमी लम्बा है।

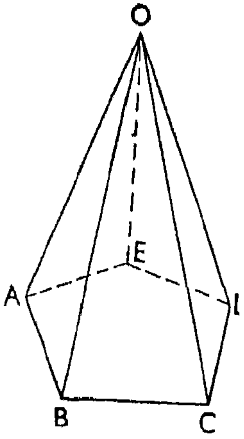


आकृति 17.15: चतुष्फलक का जाल

गत्ते को बिंदुकित रेखाओं BC, CA और AB के अनुदिश मोड़िए ताकि तीनों कोने D पास पास आ जाएँ। हमें एक चतुष्फलक का प्रतिरूप प्राप्त हो जाता है जिसका प्रत्येक फलक 3 सेमी भुजा का एक समबाहु त्रिभुज है। क्या यह एक सम चतुष्फलक है ?

4. 4 सेमी के किनार वाल एक सम चतुष्फलक का जाल खींचिए तथा उसका प्रतिरूप बनाइए।

5. पंचभुजीय आधार के पिरैमिड को देखिए। (आकृति 17.16) इसके फलकों, किनारों और शीर्षों के नाम बताइए तथा उनकी संख्या ज्ञात कीजिए।



आकृति 17.16.

*6. बिना आकृति खींचे निम्न आधारों के पिरैमिडों में फलकों, किनारों और शीर्षों की संख्याएँ बताइए :

(i) षड्भुज (ii) सप्तभुज

[क्या अब आप इस नियम का अनुमान लगा सकते हैं कि 'यदि आधार में m भुजाएँ हों तो पिरैमिड के फलकों कि संख्या $m+1$, किनारों की संख्या $2m$ तथा शीर्षों को संख्या $m+1$ होती है ?]

17.9 बहुफलक

वे सभी ठोस जिनके आकारों के विषय में हमने अभी तक पढ़ा है, बहुभुजीय फलकों के हैं। **वह ठोस जिसकी सतह (*surface*) बहुभुजीय फलकों की बनी हो बहुफलक (*polyhedron*) कहलाता है। यदि किसी बहुफलक में कोई छेद (*hole*) न हो तो वह सरल (*simple*) बहुफलक कहलाता है। हमने अभी तक जितने बहुफलक पढ़े हैं वे सभी सरल बहुफलक हैं।**

आइए निम्न सारणी को पूरा करें। माना F, E, और V क्रमशः उन बहुफलकों के फलकों, किनारों और शीर्षों की संख्या व्यक्त करते हैं, जोकि पहले स्तंभ में दिए हुए हैं।

बहुफलक का नाम	F	E	V	$F-E+V$
घनाभ				
त्रिभुजाकार प्रिज्म				
पंचभुजीय प्रिज्म				
चतुष्फलक				
चतुर्भुजीय आधार पर पिरैमिड				

आइए अंतिम स्तंभ पर विशेष ध्यान दें। हम क्या देखते हैं?

स्विटजरलैण्ड के एक महान गणितज्ञ ऑयलर (1703-1783), जिसने अपना अधिकांश समय रूस में वहाँ के राजा (czar) से प्राप्त वृत्ति (stipend) पर व्यतीत किया, ने यह खोज की कि प्रत्येक सरल बहुफलक के लिए

$F-E+V=2$ होता है।

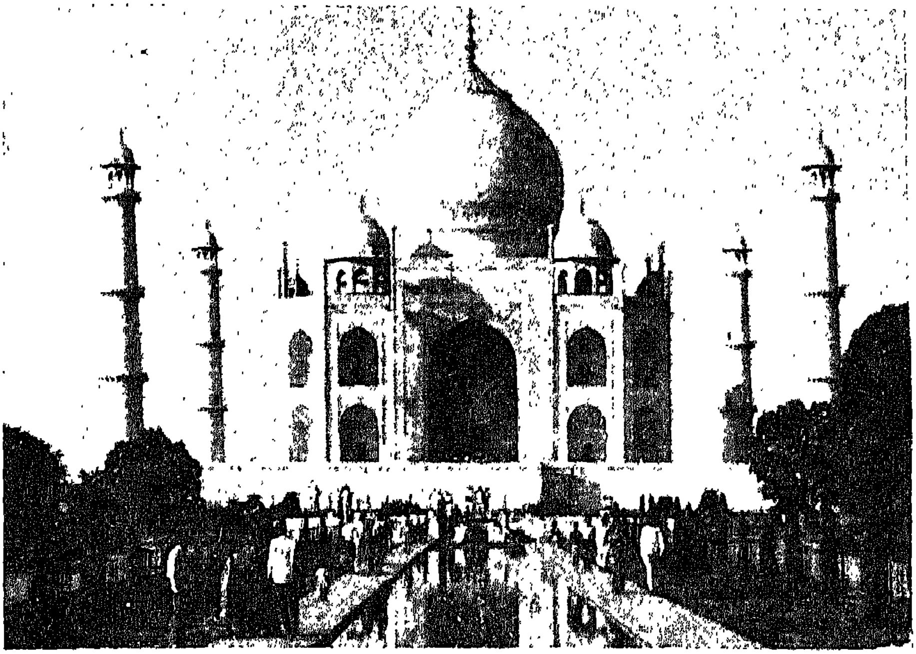
यह **ऑयलर का सूत्र** (*Euler's Formula*) कहलाता है।

एकक XVIII

रैखिक सममिति

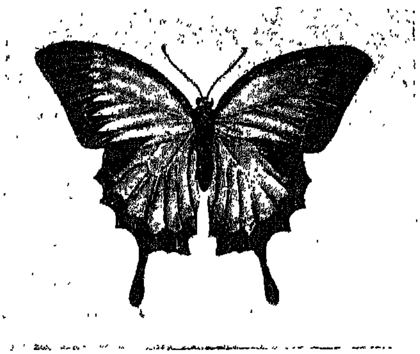
18.1 भूमिका

हम कुछ सममित आकृतियों (*symmetrical figures*) से पहले से ही परिचित हैं। सममिति (*symmetry*), कला में एक बहुत ही महत्वपूर्ण भूमिका (role) अदा करती है। यह सुन्दर डिजाइनें बनाने में कलाकार की सहायता करती है। क्या आपको अपनी देखी हुई सुन्दर इमारतों जैसे कि मंदिर, मस्जिद, महल तथा अन्य ऐतिहासिक स्मारक चिन्हों (*historical monuments*) के बारे में कुछ याद है? इनमें से प्रत्येक में कलाकार ने सममिति की कल्पना का प्रयोग किया है। आगरे का ताजमहल इनका एक बहुत ही सुन्दर उदाहरण है। (देखिए आकृति 18.1)

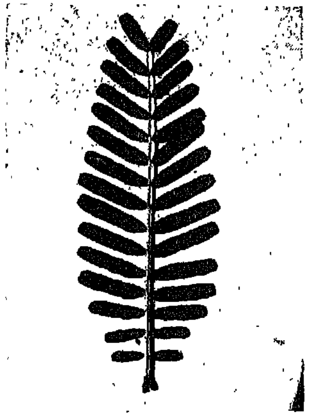


आकृति 18.1 : ताजमहल

प्रकृति की बहुत सी वस्तुओं में भी हमें सममिति देखने को मिलती है। आकृति 18.2 में ऐसी दो सममित वस्तुओं के चित्र दिए हैं। मनुष्य सममित वस्तुओं का एक अन्य उदाहरण है।



(i)



(ii)

आकृति 18.2

सममिति कई प्रकार की होती है उदाहरणार्थ बिंदु के सापेक्ष सममिति (*symmetry about a point*), रेखा के सापेक्ष सममिति, तल के सापेक्ष सममिति, घूर्णन सममिति (*rotational symmetry*) इत्यादि। इस एकक में हम ज्यामितीय आकृतियों की रेखाओं के सापेक्ष सममिति, जो कि **रैखिक सममिति** (*linear symmetry*) कहलाती है, का अध्ययन करेंगे और सममित आकृतियों की रचना करने की कुछ विधियों का वर्णन करेंगे।

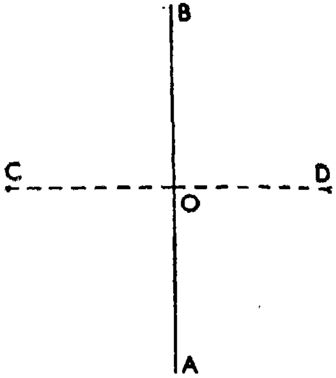
18.2 रेखा के सापेक्ष सममिति

आइए, निम्न प्रयोगों का अध्ययन करें।

प्रयोग 1 : हम एक कागज़ का पन्ना लेते हैं और उसे मोड़ लेते हैं। हमें एक मोड़ का निशान प्राप्त हो जाता है। माना यह AB है। (देखिए आकृति 18.3) मोड़ी हुई स्थिति में ही, आइए एक नुकीली पिन से कागज़ में छेद करें जिससे कि मोड़ के निशान के दोनों ओर एक एक छेद हो जाता है। अब हम कागज़ को खोल लेते हैं। हम देखते हैं कि हमारे पास एक रेखा AB है और इसके विपरीत ओर पिन द्वारा किए हुए दो छेद हैं जो कि मान लीजिए दो बिंदु C और D हैं। अब हम C और D को बिंदुकित रेखा द्वारा जोड़ते हैं जैसा कि आकृति 18.3 में दिखाया गया है। माना CD, AB को बिंदु O पर काटती है।

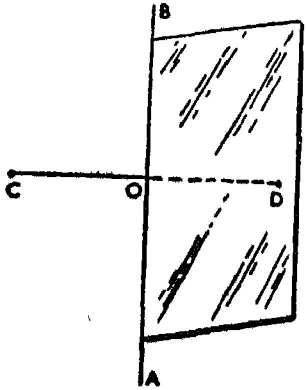
आइए CO और OD को मापें। क्या $CO = OD$ है? पुनः अब हम $\angle COA$, $\angle DOA$, $\angle COB$ तथा $\angle DOB$ को मापें। क्या ये सभी समकोण हैं?

हम देखते हैं कि AB, CD को O पर समद्विभाजित करती है तथा साथ ही $CD \perp AB$ है। हम कहते हैं कि बिंदु C और D रेखा AB के सापेक्ष **सममित स्थित** (*symmetrically situated*) हैं या यह कि C और D, रेखा AB के सापेक्ष **सममित** (*symmetric*) हैं। हम यह भी कहते हैं कि रेखा AB के सापेक्ष C, D का **सममित** है तथा D, C का **सममित** है।



आकृति 18.3

अब आइए एक समतल दर्पण (*mirror*) लें और उसे इस प्रकार खड़ा करें कि उसका सीधा किनारा AB के सम्पर्क में रहे तथा बिंदु C दर्पण के सामने रहे। (देखिए आकृति 18.4) C का प्रतिबिम्ब कहाँ पर स्थित है? क्या यह D पर प्रतीत होता है?



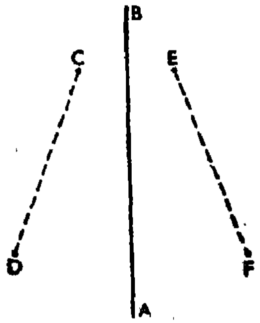
आकृति 18.4

अब दर्पण को इस प्रकार खड़ा करें कि उसका सीधा किनारा AB के सम्पर्क में रहे तथा बिंदु D दर्पण के सामने रहे। D का प्रतिबिम्ब कहाँ स्थित है? क्या यह C पर प्रतीत होता है?

अतः हम देखते हैं कि यदि AB एक दर्पण हो, तो C और D, AB में एक दूसरे के प्रतिबिम्ब हैं। इस प्रकार, **यदि दो बिंदु एक रेखा के सापेक्ष सममित हों, तो हम यह भी कह सकते हैं कि वे उस रेखा में एक दूसरे के दर्पण प्रतिबिम्ब** (*mirror images*) **हैं।**

प्रयोग 2: आइए एक दूसरा कागज लें और उसे मोड़ें। फिर मुड़ी हुई स्थिति में ही एक पिन से कागज में दो विभिन्न स्थानों पर छेद करें। अब हम कागज को खोल लेते हैं। हम देखते हैं

कि हमारे पास एक मोड़ का निशान है जो कि हम मान लेते हैं कि रेखा AB है तथा साथ ही पिन द्वारा किए हुए चार छेद हैं जो कि हम मान लेते हैं कि बिंदु C, D, E और F हैं। साथ ही C और D, AB के एक ओर स्थित हैं तथा E और F दूसरी ओर जैसा कि आकृति 18.5 में दिखाया गया है। क्या हम कह सकते हैं कि C और E, AB के सापेक्ष सममित हैं? D और F के बारे में आप क्या सोचते हैं?

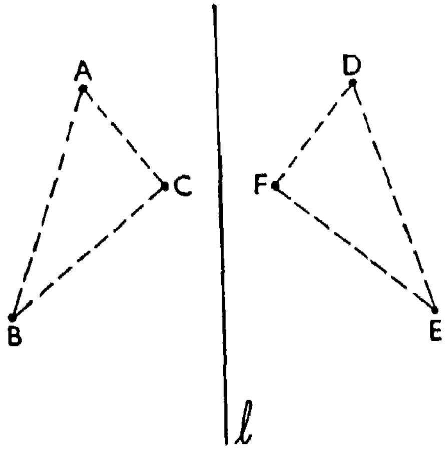


आकृति 18.5

आइए अब रेखाएं CD और EF खींचें। यदि हम कागज़ को पुन: AB पर मोड़ें तो क्या EF पूर्णतया CD पर गिरेगी? हाँ। हम कहते हैं कि रेखाएँ CD और EF, AB के सापेक्ष **सममित** हैं। हम यह भी कहते हैं कि AB के सापेक्ष, CD, EF का **सममित** है तथा EF, CD का **सममित** है।

पहले की तरह हम यह भी कह सकते हैं कि CD और EF एक दूसरे के AB में **दर्पण प्रतिबिम्ब** हैं।

प्रयोग 3: आइए एक कागज़ का नया पन्ना लें और प्रयोग 2 को केवल इस अंतर के साथ दोहराएँ कि हम कागज़ में दो के स्थान पर तीन जगहों पर छेद करें जैसा कि आकृति 18.6 में दिखाया गया है।



आकृति 18.6

जब हम कागज़ को खोलते हैं तो देखते हैं कि हमें एक रेखा, मान लीजिए, l तथा छः बिंदु, मान लीजिए, A, B, C, D, E और F प्राप्त होते हैं। अब हम BC, CA, AB तथा EF, FD, DE खींचते हैं। अब हमारे पास एक रेखा l तथा दो त्रिभुज ABC और DEF हैं। ऐसे दो त्रिभुज l के सापेक्ष परस्पर **सममित** कहलाते हैं। क्या $\triangle ABC$, l में $\triangle DEF$ का **दर्पण प्रतिबिम्ब** है? $\triangle DEF$ और $\triangle ABC$ के बारे में हम क्या कह सकते हैं?

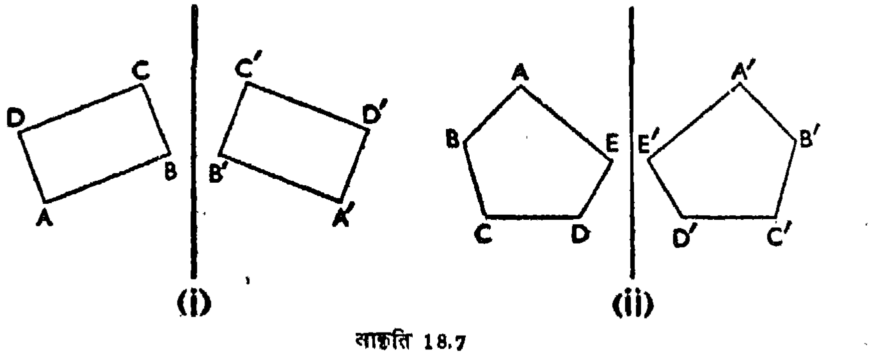
यदि हम कागज़ को पुनः l पर मोड़ें तो क्या $\triangle DEF$ पूर्णतया $\triangle ABC$ पर गिरेगा जिससे कि D, A पर; E, B पर तथा F, C पर गिरे? क्या हम कह सकते हैं कि त्रिभुज ABC और DEF सर्वांगसम हैं?

उपर्युक्त प्रत्येक प्रयोग में रेखा AB या l **सममिति रेखा** (*line of symmetry*) या **सममिति अक्ष** (*axis of symmetry*) कहलाती है।

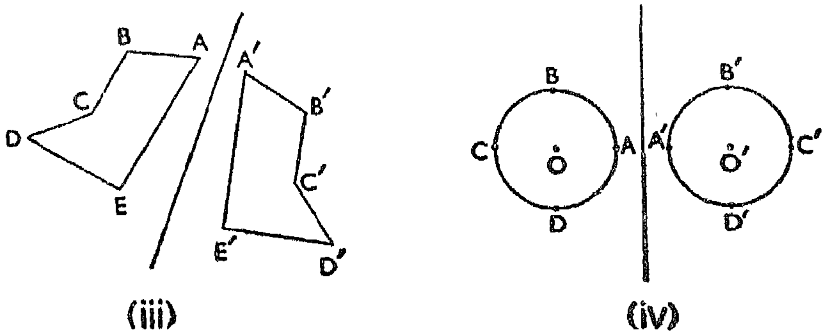
अब (रेखा के सापेक्ष) सममिति की कल्पना ो चतुर्भुज, पंचभुज, इत्यादि तथा व्यापक रूप में बिंदुओं, रेखाओं या रेखाखंडों से बनी किसी भी ज्यामितीय आकृति के लिए सरलता से लागू किया जा सकता है। प्रत्येक दशा में, दोनों आकृतियाँ सममित रेखा में एक दूसरे के दर्पण प्रतिबिम्ब होते हैं तथा यदि उस कागज़ को, जिस पर ये बनी हुई हैं, सममित रेखा पर मोड़ा जाए तो पहली आकृति, पूर्णतया दूसरी पर गिरती है। दूसरे शब्दों में, कागज़ को सममित अक्ष के अनुदिश मोड़कर एक को दूसरे के साथ संपाती (*coincide*) किया जा सकता है।

अतः हम कहते हैं कि **दो आकृतियाँ एक दी हुई रेखा के सापेक्ष सममित होती हैं** यदि वह रेखा में एक दूसरे के दर्पण प्रतिबिम्ब हों अर्थात् यदि कागज को रेखा के अनुदिश मोड़ा जाए तो दोनों आकृतियाँ परस्पर संपाती हो जाएँ। तब यह रेखा, **सममिति अक्ष** कहलाती है।

हम नीचे सममित आकृतियों के कुछ युग्म तथा उनके सममिति अक्ष दे रहे हैं। (देखिए आकृति 18.7)



आकृति 18.7

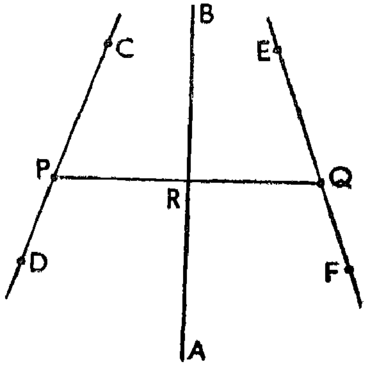


आकृति 18.7 : सममित आकृतियाँ

प्रत्येक आकृति में सममित बिंदुओं के युग्मों को A, A'; B, B'; इत्यादि से व्यक्त किया गया है।

18.3 सममित आकृतियों के युग्मों के कुछ गुण

18.3.1 प्रयोग 2 में हमें सममित बिंदुओं के दो युग्मों C, E और D, F से सममित रेखाओं CD और EF का एक युग्म प्राप्त हुआ था। आइए, CD पर कोई अन्य बिंदु P लें। AB के सापेक्ष P का प्रतिबिम्ब कहाँ स्थित होगा? अब हम $PR \perp AB$ खींचते हैं तथा PR को बढ़ाते हैं जिससे कि वह EF से Q पर मिले। (देखिए आकृति 18.8) क्या $PR=RQ$ है? क्या Q, P का सममित है?



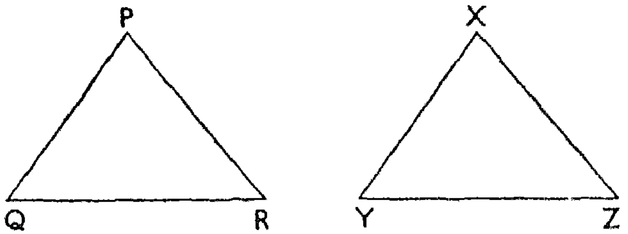
आकृति 18.8

इसी प्रकार यदि प्रयोग 3 में हम $\triangle ABC$ की किसी भी भुजा पर कोई बिंदु P लें तो हम देखेंगे कि उसका सममित Q, $\triangle DEF$ की संगत भुजा पर स्थित होगा। वास्तव में यह सममित आकृतियों के युग्मों का एक व्यापक गुण है। **सममित आकृतियों के युग्म, सममित बिंदुओं के युग्मों के बने होते हैं।** दूसरे शब्दों में, यदि हमारे पास सममित आकृतियों का एक युग्म हो तथा एक बिंदु इनमें से किसी एक के अनुदिश चलता है तो इस बिंदु का सममित दूसरी आकृति के अनुदिश चलेगा।

माना आकृति 18.6 में एक बिंदु A से B, B से C तथा वापिस C से A की ओर चलता है। इस बिंदु का सममित किस प्रकार चलता है? स्पष्ट है कि D से E, E से F तथा वापिस F से D की ओर। साथ ही हम यह देखते हैं कि दोनों बिंदु विपरीत अभिदिशाओं (*opposite senses*) के दो त्रिभुज बनाते हैं। पुनः यह भी सममित आकृतियों के युग्मों का एक व्यापक गुण है। **सममित आकृतियों के युग्म विपरीत अभिदिशाओं में बनते हैं।**

18.3.2 सर्वांगसमता और सममित आकृतियों के युग्म

हम दो ज्यामितीय आकृतियों की सर्वांगसमता से पहले ही से परिचित हैं। उदाहरणार्थ, आकृति 18.9 में दोनों त्रिभुज PQR और XYZ सर्वांगसम हैं। $\triangle PQR$ को $\triangle XYZ$ के संपाती किया जा सकता है। QR और YZ, RP और ZX, PQ और XY बराबर भुजाओं के युग्म हैं।



आकृति 18.9

यदि एक बिंदु पहले त्रिभुज की भुजाओं QR, RP और PQ के अनुदिश चले तथा एक दूसरा बिंदु दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं YZ, ZX और XY के अनुदिश चले तो हम देखते हैं कि दोनों बिंदु दोनों त्रिभुजों की भुजाओं के अनुदिश एक ही दिशा में चलते हैं।

अब हम आकृति 18.6 को लेते हैं। वहाँ हमने देखा था कि यदि हम कागज़ को l के अनुदिश मोड़ें तो $\triangle DEF$, $\triangle ABC$ के संपाती हो जाता है। अतः हमें त्रिभुजों ABC और DEF को सर्वांगसम त्रिभुज मानना चाहिए। परन्तु हम यह भी देख चुके हैं कि ये दोनों त्रिभुज एक बिंदु और उसके सममित द्वारा विपरीत अभिदिशाओं में बनाए गए हैं।

उपर्युक्त दोनों स्थितियों में परस्पर भेद दिखाने के लिए हम कहते हैं कि आकृति 18.9 के त्रिभुज PQR और XYZ **सीधे सर्वांगसम** (*directly congruent*) हैं जबकि आकृति 18.6 के दोनों त्रिभुज ABC और DEF **विपरीत सर्वांगसम** (*oppositely congruent*) हैं।

चूंकि सममित रेखा पर कागज़ को मोड़कर सममित आकृतियों के युग्मों को परस्पर संपाती किया जा सकता है तथा साथ ही चूंकि ये आकृतियाँ विपरीत अभिदिशाओं में बनती हैं इसलिए हम कह सकते हैं कि **सममित आकृतियों के युग्म विपरीत सर्वांगसम होते हैं।**

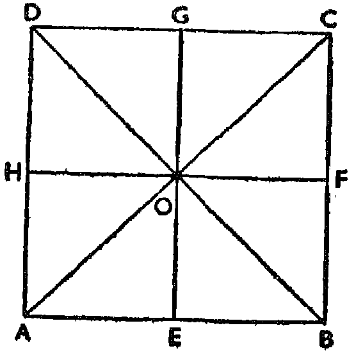
विद्यार्थी को चाहिए कि वह आकृति 18.7 में दिए हुए आकृति युग्मों के लिए इस कथन की सत्यता की जाँच करे।

18.4 सममित आकृतियाँ

अनुच्छेद 18.1 की भूमिका में सममिति की संकल्पना को दर्शाने के लिये हमने ताजमहल, एक तितली और एक पत्ती के चित्र दिए हैं। ये चित्र स्वयं में सममित हैं। इनमें से प्रत्येक चित्र में हम एक मध्य रेखा देख सकते हैं जो चित्र को दो भागों में इस प्रकार बांटती है कि यह दोनों भाग इस रेखा के सापेक्ष एक दूसरे के साथ सममित हैं। हम नीचे कुछ सरल ज्यामितीय आकृतियां दे रहे हैं जो स्वयं में सममित हैं।

18.4.1 वर्ग :

आकृति 18.10 में $ABCD$ एक वर्ग है तथा E, F, G और H क्रमशः उसकी भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं। आइए E और G को जोड़ें। क्या $AEGD$ और $BEGC$ आयत हैं?



आकृति 18.10

अब हम वर्ग को EG पर मोड़ते हैं। क्या आयत $AEGD$, आयत $BEGC$ के संपाती हो जाता है? हाँ, ऐसा ही होता है। शीर्ष A, B के संपाती है तथा D, C के संपाती है। इस प्रकार, $AEGD$ और $BEGC$ रेखा EG के सापेक्ष आयतों का एक सममित युग्म है। हम केवल यही कहते हैं कि **वर्ग ABCD रेखा EG के सापेक्ष सममित है** जो कि सम्मुख भुजाओं के एक युग्म के मध्य-बिंदुओं को मिलाती है तथा यह कि EG, वर्ग के लिए एक **सममिति रेखा या अक्ष है।**

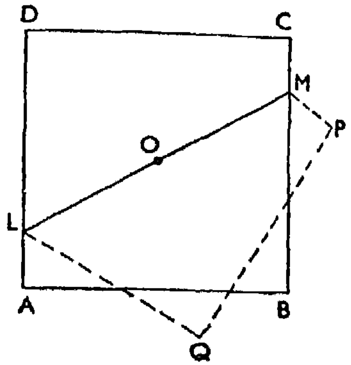
क्या यह वर्ग रेखा FH, जो कि सम्मुख भुजाओं के दूसरे युग्म के मध्य-बिंदुओं को मिलाती है, के सापेक्ष सममित है?

क्या वर्ग की कोई और सममिति अक्ष भी है? आइए विकर्ण AC को देखें।

यदि हम वर्ग को AC पर मोड़ें तो क्या होगा? क्या वर्ग AC के सापेक्ष सममित है? हाँ!

अब हम दूसरा विकर्ण BD लेते हैं। हम देखते हैं कि वर्ग BD के सापेक्ष भी सममित है।

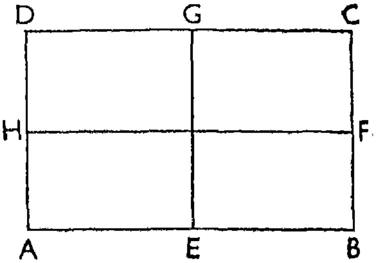
क्या वर्ग की अब भी कोई और सममिति अक्ष है? अभी तक ज्ञात चारों सममिति अक्षों में से प्रत्येक, वर्ग के केन्द्र O से होकर जाती है। आइए केन्द्र O से जाती हुई कोई और रेखा LM को देखें जो कि भुजा AD को L पर तथा BC को M पर काटती है। (देखिए आकृति 18.11) यदि हम वर्ग को



LM पर मोड़ें तो क्या होता है? क्या चतुर्भुज $LMCD$, चतुर्भुज $LMBA$ के संपाती हो जाती है? नहीं! यह एक भिन्न स्थिति $LMPQ$ धारण कर लेता है। दूसरे शब्दों में, **दिया हुआ वर्ग ABCD, LM के सापेक्ष सममित नहीं है।**

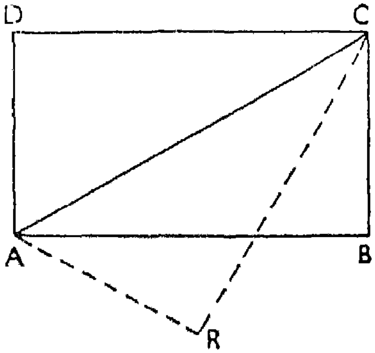
आकृति 18.11

संक्षेप में वर्ग अपनी सम्मुख भुजाओं के युग्मों के मध्य-बिंदुओं को जोड़ने से बनने वाली दो रेखाओं के सापेक्ष सममित होता है तथा साथ ही दोनों विकर्णों के सापेक्ष भी।



18.4.2 आयत : आकृति 18.12 में, $ABCD$ एक आयत है तथा E, F, G और H क्रमशः उसकी भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं। इसकी सरलता से जाँच की जा सकती है कि आयत, EG और FH जो कि उसकी सम्मुख भुजाओं के युग्मों के मध्य-बिंदुओं को जोड़ने वाली रेखाएँ है, के सापेक्ष सममित है।

आकृति 18.12



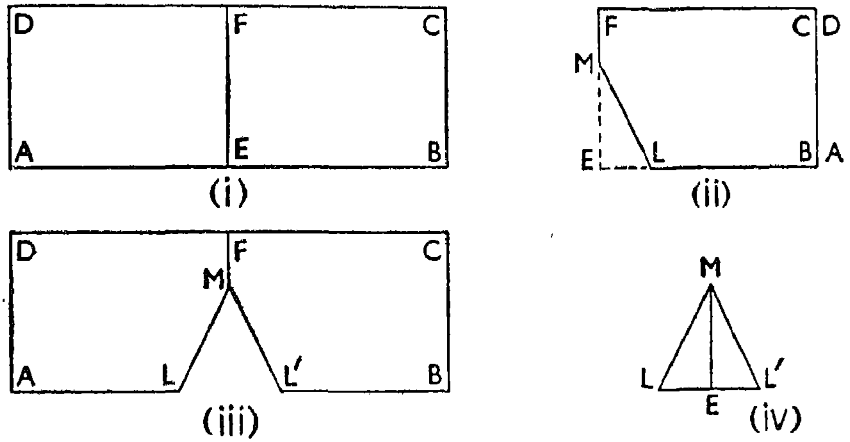
परन्तु क्या आयत विकर्ण AC के सापेक्ष सममित है? आइए $ABCD$ को AC पर मोड़ें। $\triangle ACD$, $\triangle ACB$ के संपाती नहीं होता। वस्तुतः यह एक भिन्न स्थिति $\triangle ACR$ धारण कर लेता है। (देखिए आकृति 18.13) अतः आयत विकर्ण AC के सापेक्ष सममित नहीं है। इसी प्रकार यह दूसरे विकर्ण BD के सापेक्ष भी सममित नहीं है।

आकृति 18.13

वास्तव में आयत केवल अपनी सम्मुख भुजाओं के युग्मों के मध्य-बिन्दुओं से बनी दोनों रेखाओं के सापेक्ष सममित होता है।

अब आइए कल्पना करें कि आकृति 18.13 के दो त्रिभुज ABC और CDA पतले गत्ते के बने हैं। क्या हम $\triangle CDA$ को $\triangle ABC$ पर इस प्रकार रख सकते हैं कि वे परस्पर संपाती हो जाएँ? हाँ, हम ऐसा कर सकते हैं तथा इसमें C, A पर गिरेगा, D, B पर गिरेगा और A, C पर गिरेगा। दूसरे शब्दों में, $\triangle ABC$ और $\triangle CDA$ सर्वांगसम हैं। अतः हम देखते हैं कि विकर्ण AC, आयत $ABCD$ को दो सर्वांगसम भागों में विभाजित करता है। परन्तु फिर भी AC सममिति अक्ष नहीं है। क्यों? क्योंकि दोनों सर्वांगसम त्रिभुज विकर्ण में एक दूसरे के दर्पण प्रतिबिम्ब नहीं हैं।

इस प्रकार एक रेखा किसी आकृति को दो सर्वांगसम भागों में विभाजित कर सकती है परन्तु यह सममिति अक्ष केवल तभी होगी जबकि दोनों भाग इस रेखा में एक दूसरे के दर्पण प्रतिबिम्ब हों।

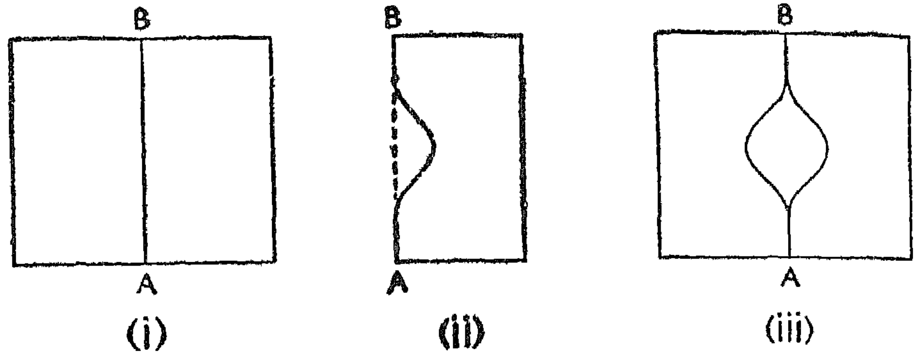


18.4.3 समद्विबाहु त्रिभुज :

आकृति 18.14

आइए एक कागज़ का पन्ना $ABCD$ लें जिसमें AB और CD के मध्य-बिंदु क्रमशः E और F हैं। [देखिए आकृति 18.14(i)] फिर हम कागज़ को EF पर मोड़ते हैं जैसा कि आकृति 18.14(ii) में दिखाया गया है। अब हम कैंची की सहायता से एक कोना ELM काटते हैं और कागज़ को खोल लेते हैं। [देखिए आकृति 18.14(iii)] साथ ही आइए कटे हुए भाग को भी खोल लें जैसा कि आकृति 18.14(iv) में दिखाया गया है। पन्ने में से समद्विबाहु त्रिभुज के आकार का एक भाग $LL'M$ कट गया है। (क्यों?) साथ ही, $\angle LEM = \angle L'EM = 90°$। क्या $\triangle LL'M$ असमान भुजा LL' के मध्य-बिंदु को सम्मुख शीर्ष M से मिलाने वाली रेखा ME के सापेक्ष सममित हैं? हाँ! हम कहते हैं कि **प्रत्येक समद्विबाहु त्रिभुज असमान भुजा के मध्य-बिंदु को उसके सम्मुख शीर्ष से मिलाने वाली रेखा के सापेक्ष सममित होता है।**

क्या कागज का शेष बचा हुआ भाग [देखिए आकृति 18.14 (iii)] FM के सापेक्ष सममित **है? हाँ!**



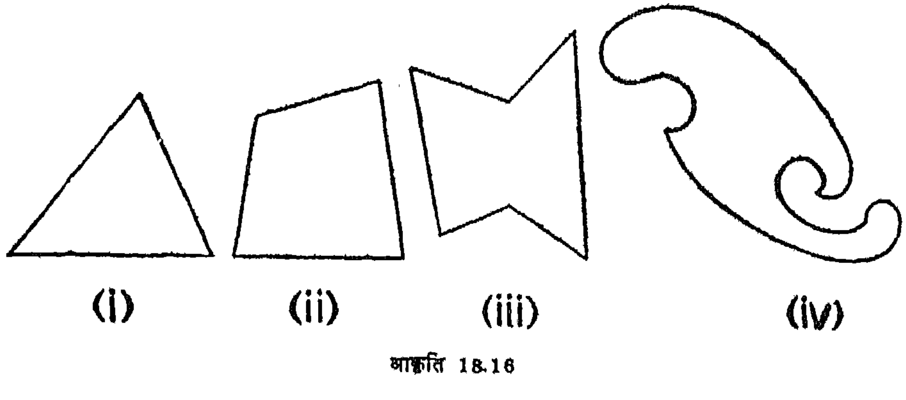
आकृति 18.15

18.4.4 पुनः आइए एक कागज़ का पन्ना लें और उसे रेखा AB के अनुदिश मोड़ें। [देखिए आकृति 18.15 (i)] एक कैंची की सहायता से अब हम छायामय भाग काट लेते हैं जैसा कि आकृति 18.15(ii) में दिखाया गया है और कागज़ को खोल लेते हैं। [देखिए आकृति 18.15(iii)] कटा हुआ भाग तथा कागज़ का शेष बचा हुआ भाग दोनों ही रेखा AB के सापेक्ष सममित हैं।

अतः **(तल में) कोई ज्यामितीय आकृति सममित तब कहलाती है जबकि (तल में) कोई ऐसी रेखा ज्ञात हो सकती हो जो इस आकृति को दो सर्वांगसम भागों में विभाजित करे तथा प्रत्येक भाग इस रेखा में एक दूसरे का दर्पण प्रतिबिम्ब हो जाए।** तब आकृति को इस रेखा के सापेक्ष **सममित** कहा जाता है तथा रेखा **सममिति अक्ष** कहलाती है।

ऐसी ज्यामितीय आकृति जिसकी कोई सममिति अक्ष न हो असममित (*non-symmetric*) कहलाती है।

असममित ज्यामितीय आकृतियों के कुछ उदाहरण नीचे दिए जा रहे हैं:

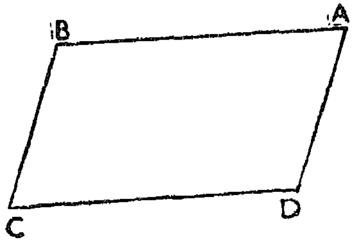


आकृति 18.16

प्रश्नावली 18.1

1. ABC एक समबाहु त्रिभुज है और D, E तथा F क्रमश: उसकी भुजाओं BC, CA और AB के मध्य-बिंदु हैं। त्रिभुज की कितनी सममिति अक्ष हैं? इनके नाम बताइए।

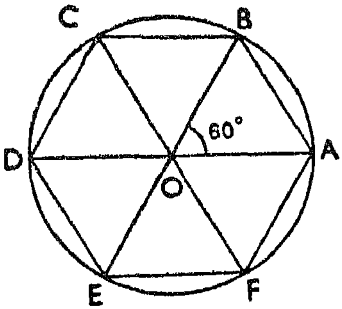
2. आकृति 18.17 में $ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है। क्या इसकी कोई सममिति अक्ष है?



आकृति 18.17

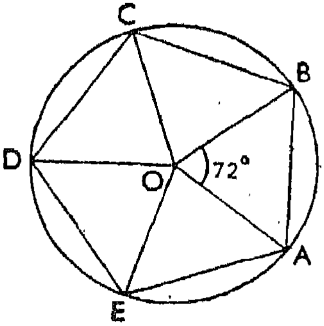
3. जाँच कीजिए कि वृत्त अपने प्रत्येक व्यास के सापेक्ष सममित होता है।

4. केन्द्र O का एक वृत्त लीजिए और इसे $60°$ के कोण के छ: त्रिज्यखंडों में विभाजित कीजिए जैसा कि आकृति 18.18 में दिखाया गया है। AB,BC इत्यादि को जोड़िए और एक सम षड्भुज $ABCDEF$ प्राप्त कीजिए। इसकी छ: सममिति अक्ष हैं। इनमें से तीन विकर्ण AD, BE और CF हैं। क्या आप शेष तीन विकर्ण ज्ञात कर सकते हैं? उनके नाम बताइए।



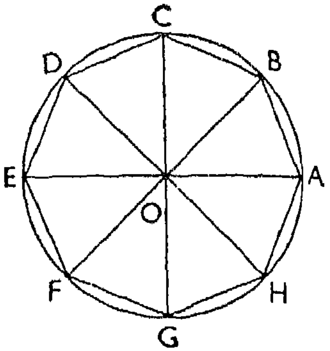
आकृति 18.18

5. केन्द्र O का एक वृत्त लीजिए और चाँदे की सहायता से इसे $72°$ के कोण के पाँच त्रिज्यखंडों में विभाजित कीजिए जैसा कि आकृति 18.19 में दिखाया गया है। AB, BC, इत्यादि को जोड़िए और एक सम पंचभुज $ABCDE$ प्राप्त कीजिए। इसकी पाँच सममिति अक्ष हैं। क्या आप इनको खोज कर इनके नाम बता सकते हैं?



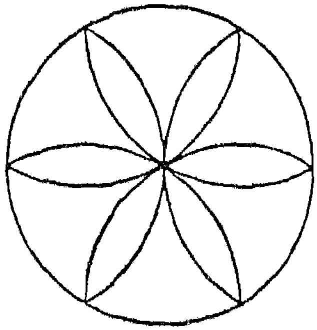
आकृति 18.19

6 केन्द्र O का एक वृत्त लीजिए और इसके दो लम्ब व्यास AOE और COG खींचिए। कोणों AOC और COE को क्रमशः व्यासों BOF और DOH से समद्विभाजित कीजिए (देखिए आकृति 18.20)। क्या ये व्यास कोणों EOG और GOA को भी समद्विभाजित करेंगे? क्या अब वृत्त 45° के कोण के आठ त्रिज्यखंडों में विभाजित हो गया है? AB, BC इत्यादि को जोड़िए और एक सम अष्टभुज $ABCDEFGH$ प्राप्त कीजिए। सम अष्टभुज की कितनी सममिति अक्ष होती हे? क्या आप इन सबके नाम बता सकते हैं?



आकृति 18.20

7. परकार की सहायता से अपनी कापी पर संलग्न आकृति (आकृति 18.21) खीचिए। इसकी कितनी सममिति अक्ष हैं?


आकृति 18.21

8. 2 सेमी और 3 सेमी की त्रिज्याओं के दो वृत्त इस प्रकार खींचिए कि उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 6 सेमी रहे। इस आकृति का सममिति अक्ष ज्ञात कीजिए।

9. 2 सेमी त्रिज्या के दो वृत्त इस प्रकार खींचिए कि उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 5 सेमी रहे। इस आकृति के सममिति अक्ष ज्ञात कीजिए।

10. एक ही केन्द्र तथा 3 सेमी और 4 सेमी त्रिज्याओं के दो वृत्त खींचिए। इस आकृति के कितने सममिति अक्ष हैं?

11. अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े (capital) अक्षरों में कौन से अक्षर ऊर्ध्वाधिर रेखा के सापेक्ष सममित हैं? कौन से क्षैतिज रेखा के सापेक्ष? कौन से दोनों रेखाओं के सापेक्ष?

12. हिन्दी वर्णमाला के कौन से अक्षर सममित हैं? उसकी (उनकी) सममिति अक्ष भी बताइए।

13. एक वृत्त और उसकी एक जीवा खींचिए। इस प्रकार बने वृत्त के दीर्घ खंड (*major segment*) और लघु खंड (*minor segment*) के क्रमशः सममिति अक्ष ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं?

14. एक अर्धवृत्त का सममिति अक्ष ज्ञात कीजिए।
15. वृत्त का एक त्रिज्यखंड दिया है। उसका सममिति अक्ष ज्ञात कीजिए।

18.5 रचनाएँ

18.5.1 एक दी हुई रेखा के सापेक्ष एक दिए बिंदु के सममित एक बिंदु की रचना करना

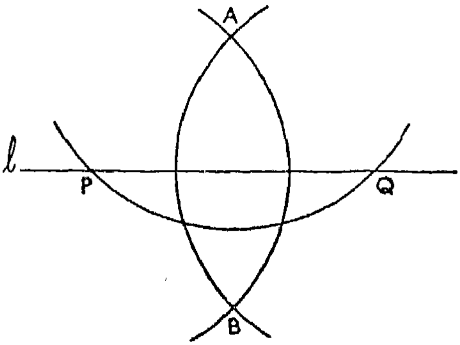
माना l दी हुई रेखा है तथा A दिया हुआ बिंदु है। हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : A को केन्द्र मानकर और एक उपयुक्त त्रिज्या लेकर हम l को P और Q पर काटता हुआ एक चाप खींचते हैं।

चरण 2 : अब P को केन्द्र मानकर तथा PA त्रिज्या लेकर हम एक चाप खींचते हैं जो कि A से होकर जाएगा।

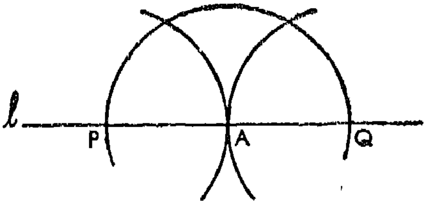
चरण 3 : अब Q को केन्द्र मानकर और चरण 2 वाली ही त्रिज्या (PA के बराबर) लेकर हम एक और चाप खींचते हैं। यह चाप भी बिंदु A से होकर जाएगा (क्यों ?) तथा पहले चाप को A के दूसरी ओर एक अन्य बिंदु, मान लीजिए, B पर काटेगा।

तब B ही वांछित बिंदु है। (देखिए आकृति 18.22) A और B रेखा l के सापेक्ष सममित हैं।



आकृति 18.22

यदि A, रेखा l पर स्थित हो तो क्या होगा? क्या हमें आकृति 18.23 से कुछ संकेत मिलता है?



आकृति 18.23

क्या B, A के संपाती होगा? हम देखेंगे कि
यदि कोई बिंदु सममिति अक्ष पर स्थित हो तो वह स्वयं के सममित होता है।

18.5.2 दो दिए हुए बिंदुओं की सममिति अक्ष की रचना करना

माना A और B दो दिए हुए बिंदु हैं।

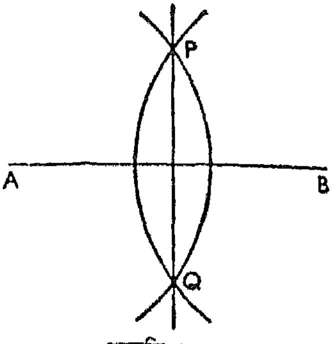
हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : A को केन्द्र मानकर और $\frac{1}{2}AB$ से अधिक त्रिज्या लेकर हम एक चाप खींचते हैं।

चरण 2 : तब B को केन्द्र मानकर और वही त्रिज्या लेकर जो चरण 1 में ली थी हम पहले चाप को बिंदुओं P और Q पर काटता हुआ एक अन्य चाप खींचते हैं।

चरण 3 : अब हम रेखा PQ खींचते हैं। तब PQ ही दिए हुए बिंदुओं A और B की वांछित सममिति रेखा है। (देखिए आकृति 18.24)

[यदि हम चरण 1 में त्रिज्या $\frac{1}{2}AB$ से अधिक न लें तो रचना में क्या कठिनाई आएगी ?]



आकृति 18.24

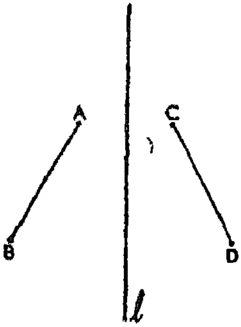
18.5.3 एक दी हुई सममिति रेखा के सापेक्ष एक दिए हुए रेखाखंड के सममित रेखाखंड की रचना करना।

माना AB दिया हुआ रेखाखंड है और l सममिति रेखा है। हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : हम पहले l के सापेक्ष A के सममित बिंदु की रचना करते हैं। (देखिए अनुच्छेद 18.5.1) मान लीजिए यह बिंदु C है।

चरण 2 : फिर हम l के सापेक्ष B के सममित बिंदु D की रचना करते हैं।

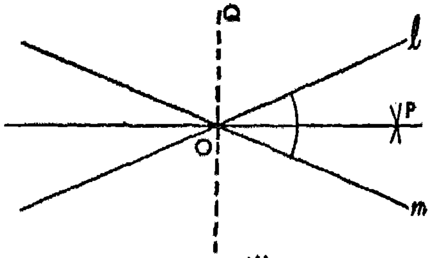
चरण 3 : अब हम C और D को जोड़ते हैं।
तब CD ही l के सापेक्ष रेखाखंड AB का वांछित सममित रेखाखंड है। (देखिए आकृति 18.25)



आकृति 18.25

18.5.4 दो दी हुई रेखाओं की सममिति रेखा की रचना करना।

स्थिति 1 : माना l और m दो रेखाएँ हैं और वे बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। हम l और m के बीच के कोण का समद्विभाजक OP खींचते हैं। तब OP रेखाओं l और m के लिए एक सममिति रेखा है। [देखिए आकृति 18 26(i)]

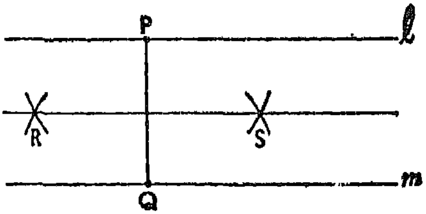


आकृति 18.26

आइए O पर $OQ \perp OP$ खींचे। क्या l और m के लिए रेखा OQ भी एक सममिति रेखा है? हाँ!

स्थिति 2: माना रेखाएँ l और m समांतर हैं। आइए l पर कोई बिंदु और P लें $PQ \perp l$ खींचें जो कि m से Q पर मिले। (क्या Q पर $PQ \perp m$ है?) अब हम P और Q की सममिति रेखा RS खींचते हैं। (देखिए अनुच्छेद 18.5.2)

तब RS ही l और m की सममिति रेखा है। [देखिए आकृति 18.26 (ii)]



(ii)

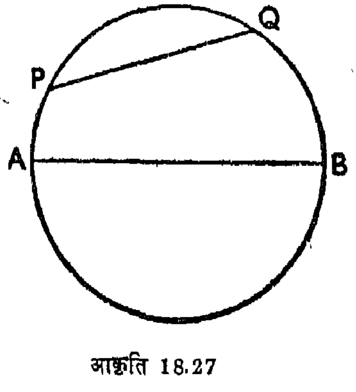
आकृति 18.26

प्रश्नावली 18.2

1. एक त्रिभुज ABC और रेखा l खींचिए। उस त्रिभुज की रचना कीजिए जो कि l के सापेक्ष $\triangle ABC$ के सममित हो।

2. एक वृत्त पर कोई बिंदु P लीजिए और वृत्त का एक व्यास खींचिए जो P में से होकर न जाता हो। इस व्यास के सापेक्ष बिंदु P के सममित बिंदु Q की रचना कीजिए। क्या Q भी वृत्त पर स्थित है?

3. आकृति 18.27 में PQ, वृत्त की एक जीवा तथा AB एक व्यास है। क्या आप एक जीवा, मान लीजिए, RS की रचना कर सकते हैं जो AB के सापेक्ष PQ के सममित हो?



आकृति 18.27

4. केन्द्र O वाले वृत्त पर दो बिंदु P और Q स्थित हैं। P और Q की सममिति रेखा खींचिए। क्या यह O से होकर जाती है?

उत्तरमाला

एकक I

प्रश्नावली 1.1

1. (*i*) 70 (*ii*) 7 (*iii*) 7000000 (*iv*) 70000000
2. 28000 3. 198 4. 1
5. (*i*) 5326 (*ii*) 7080952 (*iii*) 2003801
6. (*i*) $2\times10^3+4\times10^2+6\times1$ (*ii*) $1\times10^4+5\times10^3+9\times10^2+6\times10+8\times1$
(*iii*) 4×10^5 (*iv*) $1\times10^7+1\times10^6+1\times10^4+1\times10^3+1\times1$
7. योग=3330 9. 4 11. 10

प्रश्नावली 1.2

1. 8; 15; 190; 8646 2. 1 3. कोई नहीं 4. 6 5. 1
6. (*i*) $73>61$ (*ii*) $18<29$ (*iii*) $57<59<63$ (*iv*) $0<n$ जबकि n एक धनपूर्णांक है
7. (*i*) 68708 (*ii*) 78888 (*iii*) 3000 (*iv*) 0
8. 100005, 999992 9. 6530, 3056 10. 975421, 124579

एकक II

प्रश्नावली 2.1

1. (क) योग सम है (ख) योग सम है
2. (क) 8386 (ख) 4400 (ग) 11669 3. 4, 3
4. (क) 12, 8, 19 (ख) नहीं, नहीं 5. (क) 15 (ख)

6	1	8
7	5	3
2	9	4

प्रश्नावली 2.2

1. (क) 522 (ख) 274 (ग) 2737 2. (क) 2245
(ख) 171240 3. (क) $\begin{array}{r} 895 \\ -291 \\ \hline 604 \end{array}$ (ख) $\begin{array}{r} 5376 \\ -1859 \\ \hline 3517 \end{array}$ 4. 1
5. 1089 क्विंटल 6. 42 रु० 7. 218 रु० 8. 1089 लाख

प्रश्नावली 2.3

1. (क) 607920 (ख) 1245616 2. (क) 10172486 (ख) 104023689
3. (क) 20300 (ख) 2451600 4. 2881 पैसे
5. 999900 6. 400 लाख या 4 करोड़ टन 7. 31392 रु०
8. 36135504 9. (क) 50, 36, 72. (ख) नहीं, नहीं

प्रश्नावली 2.4

1. 6400 2. 10000 3. 6695 4. 8910 5. 6030
6. 2400 7. 13000

प्रश्नावली 2.5

2. (क) 1607 (ख) 408 (ग) 608 3. नहीं 4. 8050×302
5. 5 6. 22, 0 7. 15 पंक्तियाँ 8. 49, 74, 99,... 9. शनिवार

विविध प्रश्नावली I

(एकक I और II पर)

1. (i) $<$ (ii) $=$ (iii) $>$ 2. (क) 1, 4, 7, 15, 85 (ख) 85, 15, 7, 4, 1
3. (क) 2, 4, 7 4. (i) $7\times(8+9)=7\times8+7\times9$
(ii) $25\times(75-15)=25\times75-25\times15$ (iii) $35\times(7+3)=35\times7+35\times3$
(iv) $a\times(b+c)=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+a\times c$ (v) $a(b-c)=ab-\mathbf{ac}$ 5. 8050
6. 10 7. नहीं 8. 75 9. 125 10. हाँ, एकक स्थान
11. 0 12. 300 13. (क) अंतर सम है (ख) अंतर सम है (ग) योग विषम है, अंतर विषम है
14. 1000 15. (क) 1005 (ख) 9995 16. 7520, 2057 17. 1999
18. अंतर 8853086421 है 19. (क) 1485 (ख) 24950 20. बृहस्पतिवार 21. मंगलवार
22. (क)
$$\begin{array}{r} 123 \\ \times\ \ 7 \\ \hline 861 \\ \hline \end{array}$$
(ख)
$$\begin{array}{r} 527 \\ \times\ \ 27 \\ \hline 3689 \\ 1054\ \\ \hline 14229 \\ \hline \end{array}$$

एकक III

प्रश्नावली 3.1

1. (i) मूल्य में कमी (ii) दक्षिण को जाना (iii) जनसंख्या में वृद्धि
(iv) बैंक से रुपया निकालना (v) वजन बढ़ना 2. (i) $+7°C$ (ii) $-7°C$
3. (i) -25 (ii) $+110$ 4. लाभ (रुपयों में) : $+10, +6, +5, -7, -22, -3, -3$
5. (i) समुद्र सतह से 300 मीटर ऊपर (ii) समुद्र सतह से 100 मीटर नीचे
(iii) समुद्र सतह से 70 मीटर ऊपर 7. (i) -390 (ii) $+8840$

प्रश्नावली 3.2

1. (*i*) > (*ii*) < (*iii*) < (*iv*) < (*v*) < (*vi*) > (*vii*) > (*viii*) <
2. −41, −10, −3, 16, 17 3. 21, 0, −3, −4, −5, −10 4. (*i*) 140 (*ii*) 120 (*iii*) 140 (*iv*) −120 5. (*i*) −4948 (*ii*) −10785 (*iii*) −120610 (*iv*) 999 6. 9, 3 7. 1, 0, 8, 7, 13

एकक IV

प्रश्नावली 4.1

2. (*i*) −6 (*ii*) −10 (*iii*) −29 (*iv*) −8 (*v*) −90 (*vi*) 37
3. (क) हाँ (ख) हाँ (ग) −3, 3; −2, 2; −1, 1; 0, 0
(घ) शून्य और किसी संख्या का योग स्वयं वह संख्या होता है

प्रश्नावली 4.2

1. (*i*) −30 (*ii*) −34 (*iii*) 20 (*iv*) −80 (*v*) 900 (*vi*) 186 (*vii*) −1111 (*viii*) −6683 2. (*i*) −1289 (*ii*) 362 (*iii*) −1325 (*iv*) 0 (*v*) 2004 (*vi*) 0

प्रश्नावली 4.3

2. (*i*) −245 (*ii*) −481 (*iii*) −1100 (*iv*) −52
3. (क) −3, 8, −4 (ख) हाँ, हाँ

प्रश्नावली 4.4

1. −17, 17; 8, −8; −6, 6; −4, 4; −3, 3
2. 200, 100, 65, 48, −84, −95, 0, 1 4. (*i*) 4 (*ii*) −8 (*iii*) 0 (*iv*) 5 (*v*) 7 (*vi*) 0

प्रश्नावली 4.5

1. (*i*) 11 (*ii*) −2 (*iii*) −1 (*iv*) −9 2. (*i*) 3938 (*ii*) −8656 (*iii*) −122 (*iv*) 236 (*v*) −236 (*vi*) 732 (*vii*) −732 (*viii*) −42920 3. (*i*) < (*ii*) > (*iii*) >
4. −50, 50; नहीं 5. 8°C 6. 12 मी 7. (*i*) −7 (*ii*) 11 (*iii*) −8 (*iv*) 8 (*v*) 151 8. −1037 9. 28 10. −25 11. (*i*) 1 (*ii*) 0

प्रश्नावली 4.6

1. (*i*) −30 (*ii*) −143 (*iii*) −126 (*iv*) 72 (*v*) 0 (*vi*) 0 2. (क) हाँ (ग) हाँ (घ) −3, 0; −2, 0; −1, 0; 0, 0
1. 0; 2, 0; 3, 0 3. (*i*) −1953 (*ii*) −3591 (*iii*) 11625 (*iv*) 0

प्रश्नावली 4.7

1. (*i*) 360 (*ii*) 0 (*iii*) 13176 (*iv*) 24750
2. (*i*) −1470000 (*ii*) −720 (*iii*) 23040 (*iv*) 0
3. (*i*) ऋणात्मक (*ii*) धनात्मक (*iii*) धनात्मक (*iv*) ऋणात्मक
4. $(-1)\times 40$; $(-1)\times(-16)$; $(-1)\times 54$; $(-1)\times 68$; $(-1)\times 0$
5. −480 6. (*i*) $(11+9)\times 10 > 11+(9\times 10)$ (*ii*) $(41-3)\times 10 > 41-(3\times 10)$

प्रश्नावली 4.8

1. (*i*) −4 (*ii*) 3 (*iii*) −3 (*iv*) 14 (*v*) 0
2. (*i*) 33 (*ii*) −7 (*iii*) 120 (*iv*) 12 (*v*) −10
3. (*i*) 1 (*ii*) −1 (*iii*) −1 (*iv*) 1

विविध प्रश्नावली II

(एकक III और IV पर)

1. (*i*) $-7 > -17$ (*ii*) $10 > 0$ (*iii*) $-3 < 0$ (*iv*) $-3 < 3$
2. 1, −1 3. (*i*) $(-1)\times(-5)$ (*ii*) $(-1)\times 13$ (*iii*) $(-1)\times(-9)$ (*iv*) $(-1)\times 1$ (*v*) $(-1)\times(-1)$ (*vi*) $(-1)\times 0$ 4. $|-3| = 3$; $-|3| = -3$;
5. (*i*) −4 (*ii*) 10 6. 16°C 8. (*i*) 15 (*ii*) −16
9. (*i*) 5 (*ii*) −5 (*iii*) 6 (*iv*) −6
10. (*i*) 12 (*ii*) 10 (*iii*) 0 11. (*i*) 6 (*ii*) 0 (*iii*) 6
12. (क) 50 (ख) 25 13. (*i*) −58 (*ii*) −87 (*iii*) 819 (*iv*) 90
14. (क) 29, 3, −3, −1 (ख) हाँ 15. 50 सेमी, 16

एकक V

प्रश्नावली 5.1

1. (*i*) 8 (*ii*) 4 (*iii*) 1 (*iv*) 2 (*v*) 644
2. (*i*) 256 (*ii*) −64 (*iii*) 196 (*iv*) 81
3. (*i*) 7^1 (*ii*) $(-3)^6$ (*iii*) 10^8 (*iv*) $(-26)^1$
4. (*i*) 2500 (*ii*) 64 (*iii*) 81 (*iv*) 1 (*v*) 1 (*vi*) −1 (*vii*) 1 (*viii*) −32 (*ix*) 32 (*x*) 1024
5. (*i*) 72 (*ii*) −108 (*iii*) −100 (*iv*) −576 (*v*) −2500 (*vi*) 1000 (*vii*) 90000 (*viii*) 432 6. (*i*) −1728 (*ii*) −15625 (*iii*) −729 (*iv*) 1000000 (*v*) 8000
7. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 8. 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729

प्रश्नावली 5.2

1. (*i*) 10 (*ii*) 16 (*iii*) 15 (*iv*) 13 (*v*) 14 (*vi*) 18 (*vii*) 100 (*viii*) 26 (*ix*) 1000 2. 17, 20, 60, 28
3. 121, 144, 11025 4. 0

एकक VI

प्रश्नावली 6.1

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60   2. (क) विषम (ख) सम (ग) 4 के गणज
3. (*i*) गुणनखंड (*ii*) 3, 9 (*iii*) 1, 2, 4, 19, 38, 76 4. No; 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

प्रश्नावली 6.2

1. 2   2. हां, 9   3. 3, 5; 5, 7; 11, 13; 17, 19; 29, 31; 41, 43; 59, 61; 71, 73
5. 139   6. 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96

प्रश्नावली 6.3

2. $90 = 3^2 \times 2 \times 5$; $108 = 3^3 \times 2^2$; $9000 = 5^3 \times 2^3 \times 3^2$; $221 = 17 \times 13$;
$7325 = 5^2 \times 293$; $8712 = 2^3 \times 3^2 \times 11^2$; $13915 = 5 \times 23 \times 11^2$ 3. $5^2 \times 2^2$

प्रश्नावली 6.4

1. (*ii*) और (*iv*)   3. (*i*) हाँ (*ii*) नहीं
4. 2 से विभाज्य : (*i*), (*ii*), (*iv*), (*v*), (*vi*) और (*vii*)
3 से विभाज्य : (*i*), (*ii*), (*iii*), (*iv*), (*v*) और (*vi*)
5 से विभाज्य : (*i*), (*v*) और (*vi*)
9 से विभाज्य : (*ii*), (*iii*) और (*vi*)
10 से विभाज्य : (*i*), (*v*) और (*vi*)
5. हाँ   6. हाँ   7. (*i*) और (*ii*)

विविध प्रश्नावली III

(एकक V और VI पर)

1. 10000, 676, 10201, −1331, 59049, −1, 1
2. 21, 125, 32   3. 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84
4. $3 \times 5^2 \times 107$ 5. 151   6. 101, 103, 107, 109
7. $819 = 3^2 \times 13 \times 7$; $3105 = 5 \times 3^3 \times 23$; $153549 = 3^3 \times 11^2 \times 47$
10. 28   13. 21, 28, 36, 45
14. (*i*) 25   (*ii*) 36   (*iii*) 784

एकक VII

प्रश्नावली 7.1

1. (*ii*) और (*iv*) एकपदी हैं; (*i*) द्विपद है; (*iii*), (*vi*) और (*vii*) त्रिपद हैं
2. (*i*), (*iii*)   3. $-3y$, 4, -1, m, $17yz$

प्रश्नावली 7.2

1. (i) $18x^2y$ (ii) 0 (iii) $17abc$ 2. (i) $-15y^2$ (ii) $-18ab$ (iii) $6a^3$
3. (i) $6x^2$ (ii) $2b$ (iii) $-3x^2-2y-4$ (iv) $a-3b+2c$ (v) $7m^2-7m-8$
4. (i) $23y-22z$ (ii) $-7x^2y$ (iii) $18x^3+2x^2$ (iv) $12a+4b-25c+1$
5. (i) c^3+3a^3-2abc (ii) $-3x^2+7xy-3y^2$ (iii) $4m^3-6mn+8$
6. $a-c-3$ 7. $x^2+2xy-y^2$ 8. $-24x+21y-15a$ 9. $-x^2+2xy+3y^2$
10. $-9m-4n+2p$

प्रश्नावली 7.3

1. (i) $x-5y$ (ii) $14m-13l$ (iii) $9a-7b$ (iv) $3x^2-x$ (v) $-2y+1$
(vi) $2m-l$ (vii) $-3x-2y-4$ (viii) $3x^2-2y+3x-4$ (ix) $7-8a+2b+3c$
(x) $-7x^3+2x^2+2x-2$ (xi) $2ab-3a-3b$ (xii) $y-13x-15$
2. (i) $9x+6z-(4y+8)$ (ii) $2x^3+4y^3-(3z-9)$ (iii) $a-b-(4d+5)$

प्रश्नावली 7.4

1. (i) x^7 (ii) x^5 (iii) x^5y^5 (iv) x^5y^4 (v) $-52x^3y$ (vi) $-72abx$
(vii) $18xy^3$ (viii) $-12a^4b^4$ (ix) $6m^3n^3$ (x) $18a^3b^9$ (xi) $120a^5b^6c^6$
2. (i) $-14x^2+7xy$ (ii) a^3b-3ab^3 (iii) $-2b^2a^3+ab^3$ (iv) $-32x^3y+8x^2y^3$
(v) $13x^3y+13x^2y^2-39x^2y$ (vi) $2ba^2-4b^2y+10by^2$
(vii) $-12m^2n^2-24m^3n^3+12m^2n$ (viii) $8x^6-16x^5-16x^4+40x^3$
3. (i) $3a^2+13a-10$ (ii) $2m^2-5mn-3n^2$ (iii) $12a^2+7ab-12b^2$
(iv) $4x^4+12x^2+9$ (v) $4x^4-12x^2+9$ (vi) x^4+3x^2+2
4. (i) $13xy-2xz$ (ii) $10ab$ (iii) a^2+b^2 (iv) $4ab$ (v) $xy+6y^2$
(vi) x^2+2x (vii) b^2+2ab (viii) a^2+2ab (ix) $2a^2+3ab+3b^2$

प्रश्नावली 7.5

1. (i) -3 (ii) 0 (iii) -2 (iv) 3 (v) 4 (vi) 20
(vii) -4 (viii) -24

एकक VIII

प्रश्नावली 8.1

1. (i) $x=5$ (ii) $y=4$ (iii) $m=3$ (iv) $x=4$ (v) $y=4$
(vi) $z=-2$ (vii) $x=3$

प्रश्नावली 8.2

1. $x=5$ 2. $x=2$ 3. $y=2$ 4. $x=3$ 5. $y=4$ 6. $y=-3$ 7. $x=3$
8. $y=-1$ 9. $x=2$ 10. $z=10$ 11. $y=-20$ 12. $m=-1$
13. $y=3$ 14. $x=-2$ 15. $x=0$ 16. $x=3$ 17. $x=2$

प्रश्नावली 8.3

1. 21   2. 30   3. 21, 32   4. 14, 42   5. 7, 8, 9
6. 23 मी, 19 मी   7. 36 मी   8. 25 पैसे के सिक्के : 20 और 10 पैसे के सिक्के : 40
9. 100.00 रु० के पुरस्कार : 19 और 25.00 रु० के पुरस्कार : 44   10. 5 वर्ष

विविध प्रश्नावली IV

(एकक VII और VIII पर)

1. (*i*) एकपदी है; (*iii*) और (*v*) द्विपद हैं; (*ii*) और (*iv*) त्रिपद हैं
2. (*i*) $2-y$ (*ii*) y^2 (*iii*) $-7y$ (*iv*) $4a^2+2$
3. (*i*) $a+b+c$ (*ii*) $-x^2-y^2-z^2$ (*iii*) $x+1$
4. (*i*) $2y^2x-2x^2-2z$ (*ii*) $-2a-2b$ (*iii*) $-2x^2+6x+9$ 5. $3x+3y$
6. (*i*) $x^2-6xy-3y^2-10x$ (*ii*) $2xy^2-5y^3+x^3-x^2-7$ 7. $6b$ एकक
8. (*i*) $3x^2-6y^2$ (*ii*) $a-b$ (*iii*) $b-a-3c$
9. (*i*) 3 (*ii*) -3 (*iii*) -1 (*iv*) 5 (*v*) -8
10. (*i*) 3 (*ii*) 9 (*iii*) 1 (*iv*) 0 (*v*) 0
11. (*i*) x^6 (*ii*) x^2+x (*iii*) x^2-2x (*iv*) $5x^2-x^3$ (*v*) $-x^3+x^5$
12. (*i*) x^2-y^2 (*ii*) $x^2+xy+x+y$ (*iii*) $x^2-5xy+6y^2$ (*iv*) $y^2+xy-2x^2$
13. (*i*) 4 (*ii*) $4y^2$ (*iii*) -7 14. $z-y$, 0   16. $4a$ एकक
17. $-x^2-4y^2-2xy-2x+8y-8$ 18. (*i*) -1 (*ii*) 3
19. (क) (*i*) $p^3r^2oe^2tis$ (*ii*) $com^2ul^3ai^2vy$ (*iii*) $c^2a^2n^2el^2tio$
19. (ख) (*i*) *proportion* (*ii*) *addition* (*iii*) *symmetry*   20. (*i*) $x=13$ (*ii*) $x=9$
(*iii*) $x=-1$ (*iv*) $x=14$ (*v*) $x=-4$ (*vi*) $x=-2$ (*vii*) $x=0$ (*viii*) $x=1$
(*ix*) $x=9$ 21. 25   22. राम : 220, श्याम : 100; जीवन : 230
23. 230   24. 602, 86   25. 34 सेमी   26. 300 किमी

एकक IX

प्रश्नावली 9.1

1. (*i*) 1 : 8 (*ii*) 5 : 4 (*iii*) 2 : 1   3. (*i*) 1 : 3 (*ii*) 5 : 3
(*iii*) 2 : 3 (*iv*) 3 : 5 (*v*) 3 : 20 (*vi*) 3 : 4 (*vii*) 4 : 1 (*viii*) 1 : 4
(*ix*) 4 : 1   4. 3 : 2   5. 4 किमी   7. 25 घन सेमी   8. 4   9. 800

प्रश्नावली 9.2

2. (*iv*) और (*v*) समानुपात में हैं   3. (क) हाँ (ख) हाँ
5. 5   6. 33   7. 360   8. 9   9. -21

प्रश्नावली 9.3

1.

समय (मिनटों में)	2	3	7	25	155
ऊँचाई (मीटर में)	24	36	84	300	1860

2.

लम्बाई (मीटर में)	3	4	7	15	20
मूल्य (रुपयों में)	78	104	182	390	520

3. 39, 65, 78, 130 किलोग्राम 4. −6 5. 45 : 1, 8 घंटे, 90 किमी

6. 18 मीटर

प्रश्नावली 9.4

1. (*i*)

x	36	72	108	144
y	48	24	16	12

(*ii*)

x	50	75	100	150	200
y	300	200	150	100	75

2. (*i*) 80 (*ii*) 60 3. 56 किमी प्रति घंटा 4. 8 5. 14

6. 10 दिन 7. 6 घंटे 8. (*i*) 300 (*ii*) 60 सेमी

प्रश्नावली 9.5

1. (*i*) 1 : 5 (*ii*) 3 : 10 (*iii*) 6 : 25 (*iv*) 19 : 20 (*v*) 3 : 2

2. (*i*) 140 रु० (*ii*) 600 (*iii*) 70 गैलन (*iv*) 24 मीटर (*v*) 21

3. 2.00 रु० 4. 180.00 रु० 5. 1568

6. 7500 रु०, 8750 रु०, 8750 रु० 7. 132 8. 12%

प्रश्नावली 9.6

1. 210 रु० 2. लाभ : 64 रु०, 8% 3. 1320 रु० 4. 50 रु०

5. 240 रु० 6. 1200 रु० 7. 594 रु०, 94 रु० 8. 34500 रु०

प्रश्नावली 9.7

1. 525 रु० 2. 72 रु०, 360 रु० 3. 45 रु० 4. 2600 रु०

5. 350 रु०, 4950 रु० 6. 10%

एकक X

प्रश्नावली 10.1

1. कितनी ही रेखाएँ

2. एक 3. (*i*) एक (*ii*) तीन 4. 6 5. (*i*) *BA*, *BC*, *BD*
(*ii*) *CB*, *CD*, *CA* (*iii*) *DA*, *DC*, *DB* 6. 3 7. 6, 6

8. *A*, *E*, *D*; *B*, *F*, *D*; *C*, *F*, *E* 9. 10 10. 1

एकक XI

प्रश्नावली 11.1

1. (*i*) 3 (*ii*) 10 (*iii*) 7 2. 6

प्रश्नावली 11.2

1. (*i*) $AB > CD$ (*ii*) $AB = CD$ (*iii*) $AB < CD$
2. हाँ 3. b

प्रश्नावली 11.3

1. (*i*) 300 सेमी (*ii*) 240 सेमी (*iii*) 435 सेमी (*iv*) 520 सेमी
2. (*i*) 60 मिमी (*ii*) 64 मिमी (*iii*) 2000 मिमी (*iv*) 3400 मिमी
   (*v*) 4520 मिमी 4. 3 सेमी

प्रश्नावली 11.4

3. 6.5 सेमी 5. 7.5 सेमी

एकक XII

प्रश्नावली 12.1

1. $\angle ABC$ या $\angle B$; $\angle BCA$ या $\angle C$ 3. $\angle COB$, $\angle BOD$, $\angle AOD$ 4. $\angle NPM$

प्रश्नावली 12.3

3. उत्तर 4. दक्षिण 7. $40°$, $20°$, $10°$, $60°$, $45°$
8. $30°$, $130°$, $110°$, $100°$ 9. (*i*), (*ii*), (*iii*), (*vii*) और (*viii*) पूरक हैं; (*iv*), (*v*), (*vi*) और (*ix*) संपूरक हैं 11. $45°$ 12. $90°$ 13. (क) सत्य (ख) असत्य 14. न्यून कोण 15. $132°$

प्रश्नावली 12.7

1. O और N अभ्यंतर में हैं; M बहिर्भाग में हैं
2. नहीं, नहीं 3. नहीं, नहीं

एकक XIII

प्रश्नावली 13.2

1. (*i*) $\angle CQE$ (*ii*) $\angle FQD$ 2. $\angle PQD$

प्रश्नावली 13.3

1. $45°$ 2. $75°$ 3. $110°$

प्रश्नावली 13.5

2. हाँ

एकक XIV

प्रश्नावली 14.1

1. 5

प्रश्नावली 14.2

1. नहीं 2. नहीं 3. (i) $80°$ (ii) $60°$ (iii) $30°$ (iv) $\angle A = \angle C = 45°$
4. (क) (i), (ii) (ख) (iv) (ग) (iii) 5. (i) और (ii) सत्य हैं
7. 6.6 सेमी 8. हाँ 9. $30°, 60°, 90°$; समकोण त्रिभुज
10. $45°, 45°, 90°$

प्रश्नावली 14.3

2. समबाहु 3. $30°, 30°$ 4. $45°, 45°$

एकक XV

प्रश्नावली 15.1

3. (क) और (ग) सत्य हैं 4. हाँ 6. हाँ 8. $260°$

प्रश्नावली 15.2

4. नहीं

एकक XVII

प्रश्नावली 17.1

1. *ABFE* और *DCGH*, *BCGF* और *ADHE* 2. वर्ग 3. वर्ग
4. वग 5. (i) *ABFE* और *BCGF* (ii) *ABCD* और *CDHG* (iii) *EFGH* और *ADHE* 6. (i) *BA, BF, BC* (ii) *DA, DH, DC* (iii) *FG, HG, CG*
7. *B, H*; *BH*। *C, E*; *CE*। *D, F*; *DF*।

प्रश्नावली 17.2

1. (i) *ACFD* और *ABED* (ii) *EFCB* और *DFCA* (iii) *ABED* और *ABC*
2. (i) *AB, AD, AC* (ii) *EB, ED, EF* (iii) *AC, BC, FC*
4. (i) 8, 18, 12 (ii) 10, 24, 16

प्रश्नावली 17.3

2. *BA, OC*; *CA, OB* 3. हाँ 5. 6, 10, 6 6. (i) 7, 12, 7
(ii) 8, 14, 8

एकक XVIII

प्रश्नावली 18.1

1. 3, *AD, BE, CF* 2. नहीं
4. सम्मुख भुजाओं के तीन युग्मों के मध्य-बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाएं
5. शीर्षों को उनकी सम्मुख भुजाओं के मध्य-बिंदुओं से जोड़ने वाले रेखाएं। 6. हाँ, हाँ, 8
7. 6 8. उनके केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा
9. उनके केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा। साथ ही, उनके केन्द्रों को जोड़ने वाले रेखाखंड का लम्ब समद्विभाजक
10. कितनी ही 12. ठ, इसकी ऊर्ध्वाधर रेखा
13. जीवा का लम्ब समद्विभाजक 14. व्यास का लम्ब समद्विभाजक 15. केन्द्रीय कोण का समद्विभाजक

प्रश्नावली 18.2

2. हाँ 4. हाँ

पारिभाषिक शब्द-सूची

अंक	digit
अंकगणित	arithmetic
अंकगणित की आधारभूत प्रमेय	Fundamental Theorem of Arithmetic
अंकित मान	face value
अंत: एकांतर कोण	alternate interior angles
अंत: कोण	interior angle
अंत बिंदु	end point
अंतर द्वारा तुलना	comparison by difference
अंतराष्ट्रीय अंकन पद्धति	International System of Numeration
अंश	degree
अंशांकन	graduations
अंशांकित रूलर	graduated ruler
अक्स	trace
अक्स करने का कागज	tracing paper
अक्षर गुणनखंड	literal factor
अक्षर संख्याएँ	literal numbers
अज्ञात	unknown
अद्वितीय	unique
अधिक कोण	obtuse angle
अधिक कोण त्रिभुज	obtuse triangle
अर्ध वृत्त	semicircle
अनुक्रमानुपात	direct proportion/direct variation
अनुक्रमानुपाती	directly proportional/vary directly
अनुपात	ratio
अनुपात के पद	terms of the ratio
अनुप्रयोग	applications
अभाज्य गुणनखंडन	prime factorization
अभाज्य गुणनखंडन गुण	*Prime Factorization Property*
अभाज्य युग्म	twin primes
अभाज्य संख्या	prime number
अभिगृहीत	axiom
अभिदिशा	sense
अभ्यंतर	interior
अम्ल	acid
अवरोही क्रम	descending order
असंरेखी	non-collinear
असममित	non-symmetric

असमान	unequal
असमान चिन्ह	unlike signs
असमान पद	unlike terms
अष्टभुज	octagon
आकृति	figure
आधार	base
आधारभूत संक्रियाएँ	fundamental operations
आपतन गुण	incidence property
आयत	rectangle
आयतन	volume
आयताकार लम्ब प्रिज्म	rectangular right prism
आयताकार समांतर षड्फलक	rectangular parallelopiped
आरोही क्रम	increasing order
आलम्ब	fulcrum
आसन्न कोण	adjacent angles
इरेटोसथीन्स की सीव	Sieve of Eratosthenes
उत्तरी ध्रुव	North Pole
उभयनिष्ठ/सर्वनिष्ठ	common
उभयनिष्ठ सीमा	common boundary
ऊँचाई	height
ऊर्ध्वाधर तल	vertical plane
ऊर्ध्वाधर दिशा	vertical direction
ऊर्ध्वाधर रेखा	vertical line
ऊपर	above
ऋजुकोण	straight angle
ऋण	minus/loan
ऋणात्मक	negative
ऋणात्मक पूर्णांक	negative integer
एकक/मात्रक	unit
एकक स्थान	unit's place
एकपदी	monomial
एकांतर कोण	alternate angles
एल्गोरिथ्म	algorithm
कम्पन आवृत्ति	vibration frequency
किनारा	edge
किरण	ray
केन्द्र	centre
कोण	angle
क्रमविनिमेय	commutative
क्रय मूल्य	cost price
क्षैतिज तल	horizontal plane
क्षैतिज रेखा	horizontal line
खगोलशास्त्री	astronomer

खाता	account
गणन	count
गणन संख्याएं	counting numbers
गणित	mathematics
गतिविधि	activity
गमन	transition
गहराई	depth
गुणज	multiple
गुणन	multiplication
गुणनखंड	factor
गुणनखंडन	factorization
गुणनफल	product
गुणन सारणियाँ	multiplication tables
गुणांक	coefficient
घन	cube
घनमूल	cube root
घनाभ	cuboid
घात	power
घातांक	exponent/index
घूर्णन	rotation
घूर्णन सममिति	rotational symmetry
चतुर्थमूल	fourth root
चतुर्भुज	quadrilateral
चतुष्फलक	tetrahedron
चाँदा	protractor
चाप	arc
चिन्ह	sign/mark
चौड़ाई	breadth/width
जीवा	chord
डिवाइडर	divider (ins)
तत्समक अवयव	identity element
तल	plane
तापमान	temperature
तिर्यक रेखा	transversal
तुला	balance
त्रिज्यखंड	sector
त्रिज्य रेखाखंड	radial segment
त्रिज्या	radius
त्रिपद	trinomial
त्रिभुज	triangle
त्रिभुजाकार क्षेत्र	triangular region
त्रिभुजाकार संख्याएँ	triangular numbers
थोक विक्रेता	wholesaler

दक्षिण पक्ष	Right Hand Side
दर्पण	mirror
दर्पण प्रतिबिम्ब	mirror image
दर प्रतिशत	rate per cent
दशांश	tenth
दस का स्थान	ten's place
द्विपद	binomial
दीर्घ खंड	major segment
दीर्घ चाप	major arc
धनपूर्णांक	natural number
धनात्मक पूर्णांक	positive integers
धारा	current
निर्माता	manufacturer
निरपेक्ष मान	absolute value
नीचे	below
न्यून कोण	acute angle
न्यून कोण त्रिभुज	acute triangle
पंचभुज	pentagon
पंचमूल	fifth root
पक्ष	side
पग	step
पद	term
पद का गुणांक	coefficient of the term
परकार	compasses
परमाणु ऊर्जा	atomic energy
परवर्ती	successor
परिधि	circumference
परिमाण	magnitude
परिमाप	perimeter
पार्श्व फलक	side face
पिरैमिड	pyramid
पुनर्व्यवस्थितिकरण गुण	rearrangement property
पुस्तकालय	library
पूर्ण घन	perfect cube
पूर्ण वर्ग	perfect square
पूर्ण संख्या	whole number
पूर्ण संख्याओं का समुच्चय	set of whole numbers
पूर्णांक	integers
पूर्णांकों का समुच्चय	set of integers
पूर्णांकीय घात	integral powers
पूरक	complement
पूरक कोण	complementary angles
प्रतिकूल	opposites

प्रतिच्छेद	intersect
प्रतिच्छेद बिंदु	point of intersection
प्रतिबन्धित समीकरण	conditional equation
प्रतिरूप	model/pattern
प्रतिरूप भिन्न	Representative fraction
प्रतिरूप विधि	pattern approach
प्रतिलोम	inverse
प्रतिवर्ती कोण	reflex angle
प्रतिशत/प्रतिशतता	per cent/percentage
प्रतिस्थापन	substitution
प्रयत्न और भूल	trial and error
प्रसारित संकेतन	expanded notation
प्रारम्भिक बिंदु	initial point
प्रिज्म	prism
प्रोत्साहन	motivation
फलक	face
बराबर/समान	equal
बहिर्भाग	exterior
बहुफलक	polyhedron/polyhedra(pl)
बहुभुज	polygon
बार बार योग	repeated addition
बार बार व्यवकलन	repeated subtraction
बाह्य : कोण	exterior angle
बिंदु	point
बिंदुकित प्रतिरूप	dot pattern
बीजगणित	algebra
बीजीय व्यंजक	algebraic expression
ब्याज	interest
भागफल	quotient
भाज्य	dividend
भाज्य संख्या	composite number
भुजा	arm/side
भूमध्य रेखा	Equator
भौतिकी	physics
मध्य	between
मध्य के पद	middle terms
मध्य-बिंदु	middle point
मध्यस्थिति	betweenness
मानक	standard
मानक कोण	standard angle
मापन	measure/measurement
मिश्रधन	amount
मीटर छड़	metre rod

मुख्य विकर्ण	main diagonal
मूल	root/original
मूलधन	principal
मैजिक वर्ग	majic square
मोटाई	thickness
मोड़ का निशान	crease
मृत्यु समुद्र	Dead Sea
युग्म	pair
योग	addition/sum
योग पर वितरित	distributive over addition
योज्य प्रतिलोम	additive inverse
रसायन	chemistry
रिक्त	empty
रूलर	ruler
रेखा	line
रेखाखंड	line-segment/segment
रैखिक युग्म	linear pair
रैखिक सममिति	linear symmetry
लघु खंड	minor segment
लघु चाप	minor arc
लम्ब	perpendicular
लम्ब प्रिज्म	right prism
लम्बाई	length
लाभ	profit
लौंद का वर्ष	leap year
वर्ग	square
वर्गमूल	square root
वर्ग संख्याएँ	square numbers
वाम पक्ष	Left Hand Side
वार्षिक	per annum
विकर्ण	diagonal
विक्रय मूल्य	selling price
वितरण गुण	distributive property
विपरीत अभिदिशाएँ	opposite senses
विपरीत किरणें	opposite rays
विपरीत दिशाएँ	opposite directions
विपरीत सर्वांगसम	oppositely congruent
विभवांतर	potential difference
विभाजक	divisor
विभाजन	division
विभाजन द्वारा तुलना	comparison by division
विभाज्य	divisible
विभाज्यता	divisibility

विभाज्यता की जाँच	divisibility test
विभाजित	divide
विमाएँ	dimensions
विषमबाहु त्रिभुज	scalene triangle
विषम संख्या	odd number
वैज्ञानिक अनुसंधान	scientific research
वृत्त	circle
वृत्तखंड	segment of a circle
वृत्तीय क्षेत्र	circular region
व्यवकलन	subtraction
व्यवकलित करना	subtract
व्यास	diameter
व्युत्क्रमानुपात	inverse proportion/inverse variation
व्युत्क्रमानुपाती	inversely proportional/vary inversely
शाब्द समस्याएँ या प्रश्न	word problems
शीर्ष	vertex
शीर्ष कोण	vertical angle
शीर्षाभिमुख कोण	vertically opposite angles
शून्य	zero
शून्य का योज्य गुण	addition property of zero
शून्य कोण	zero angle
शून्येतर	non-zero
शेष	remainder
संकल्पना	concept
संक्रिया सारणी	operation table
संकेतन	notation
संख्या रेखा	number line
संख्यांक	numeral
संख्यात्मक गुणनखंड	numerical factor
संगत कोण	corresponding angles
संग्रह	collection
संगामी	concurrent
संपाती	coincide
संपूर्ण कोण	complete angle
संपूर्ण संख्या	perfect number
संपूरक	supplement
संपूरक कोण	supplementary angles
संयोग	combination/association
संरेखी	collinear
सप्तभुज	septagon
सपाट	flat
सम अंक	even digit
समकोण	right angle

समकोण त्रिभुज	
समद्विबाहु त्रिभुज	
समद्विभाजक	
सम बहुभुज	regular polygon
समबाहु त्रिभुज	equilateral triangle
सममित	symmetric/symmetrical
सममित स्थित	symmetrically situated
सममिति	symmetry
सममिति अक्ष	axis of symmetry
सममिति रेखा	line of symmetry
सम्मुख	opposite
सम संख्या	even number
समांतर	parallel
समांतर चतुर्भुज	parallelogram
समान चिन्ह	like signs
समान पद	[illegible] terms
समानुपात	[illegible]
समानुपातता स्थिरांक	[illegible] of proportionality
सामिका	[illegible]
समीकरण	[illegible]
समुद्र सतह	
समूहन संकेत	grouping symbols
सरलतम रूप	simplest form
सर्वांगसम	congruent
सहचारी	associative
साधारण ब्याज	simple interest
साहचर्य गुण	associative property
साहुल	plumb-line
सिरों के पद	extreme terms
सीधापन	straightness
सीधे सर्वांगसम	directly congruent
सूचित योग	indicated sum
सूत्र	formula
सौ का स्थान	hundred's place
स्तम्भ विधि से योग	column addition
स्थान धारक	place holder
स्थानीय मान	place value
स्वयं सिद्ध प्रमाण	postulate
षड्भुज	hexagon
हल	solution
हल्का	dilute
हानि	loss
हिन्दू अरेबिक अंकन पद्धति	Hindu Arabic Numeration System